7 一次方程式系の解

7-1 係数行列

未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む一次の連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

を考える。(式の個数 m と未知数の個数 n は一致していなくともよいものとする。) この様なものを一次方程式系 (system of linear equations) という。一次方程式系は行列とベクトルを用いて書き表すことが出来る。つまり、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば、方程式系は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わせる。さらに、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array} \right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、一次方程式系は

$$\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{o}$$

と表わされる。行列 A を**係数行列 (coefficient matrix)**、行列 $\tilde{A}$ を**拡大係数行列 (enlarged coefficient matrix)** と呼ぶ。

7-2 一次方程式系の解

一次方程式系を解くには、拡大係数行列 $\tilde{A}$ を行の変形（$L1, L2, L3$) と列の交換 (R_1) のみを用いて次の形へ変形すればよい。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & * & \cdots & * & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * & * \\ \hline & O & & & O & & * \end{array}\right)$$

ただし、一番右側の列は交換しないものとする。便宜上、$\tilde{A}$ の各列の上に未知数を書いておき、列を交換するたびごとに未知数も交換することにする。

さて、具体的に、

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & d_{1(r+1)} & \cdots & d_{1n} & c_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & d_{r(r+1)} & \cdots & d_{rn} & c_r \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m \end{array}\right)$$

と変形できたとしよう。このとき、方程式系は

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & + & d_{1(r+1)}x_{r+1} & + & \cdots & + & d_{1n}x_n & = c_1 \\ x_2 & + & d_{2(r+1)}x_{r+1} & + & \cdots & + & d_{2n}x_n & = c_2 \\ \cdots & & & & & & & \\ x_r & + & d_{r(r+1)}x_{r+1} & + & \cdots & + & d_{rn}x_n & = c_r \\ & & & & & & 0 & = c_{r+1} \\ & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 0 & = c_n \end{array}\right.$$

と変形されていることになる。したがって、次の場合に分けることが出来る。

（場合 1）$c_{r+1}, \cdots, c_n$ の中に 0 **でない**ものがある場合。

この場合には、方程式系を満たす解はないことになる。(解が存在すると仮定して式変形を行い、その結果矛盾が起こったと考えればよい。)

（場合 2）$c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$ の場合。

解は

$$\begin{cases} x_1 & = -d_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - d_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 & = -d_{2(r+1)}x_{r+1} - \cdots - d_{2n}x_n + c_2 \\ \cdots & \\ x_r & = -d_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - d_{rn}x_n + c_r \end{cases}$$

となる。ここで、$x_{r+1}, \cdots, x_n$ は自由に値を選べる変数（自由変数、パラメータ）であり、$x_1, \cdots, x_r$ はこれらパラメータによって決まる値である。

または次のように表現してもよい。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{1(r+1)} \\ \vdots \\ -d_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \cdots + \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

解に含まれるパラメータの個数は $n-r$ であり、$n=r$ の場合には、解は唯一つに定まる。$n>r$ の場合には解はパラメータを含み、**不定**ということになる。

（例題） 次の連立方程式が解を持つときの k と値と、そのときの解を求めよ。

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & -4w & = -6 \\ 2x & +4y & -5z & -10w & = -15 \\ -x & -2y & +4z & +2w & = k \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & -5 & -10 & -15 \\ -1 & -2 & 4 & 2 & k \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & k-6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & y & w & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & k-6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & y & w & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -10 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} \end{array}$$

以上より、方程式系が解を持つのは $k=3$ のときであり、その解は

$$\begin{cases} x = -2y + 10w - 15 \\ z = 2w - 3 \end{cases}$$

である。

(補足その 1)　式の個数 m と未知数の個数 n とが一致し、かつ係数行列が正則行列の場合の補足。

$m = n$ という条件から、係数行列 A は正方行列となる。もし A が正則だとすると、一次方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、左から A^{-1} をかけることにより、

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

という唯一の解を持つことが分かる。

(補足その 2)　定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{o}$ の場合の補足。

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ の場合、すなわち $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ という形の方程式系を**斉次 1 次方程式系** (system of homogenious linear equations) とよぶ。斉次というのは「次数がそろっている」と言う意味で、この場合はすべてが 1 次の項のみからなるのでこのように呼ばれる。

拡大係数行列の一番右の列はすべてが 0 となるので、これを変形してもこの部分は 0 のままである。したがって、解なしという事態は起こらず、解は一つにもとまるか、または不定解であることが分かる。（少なくとも、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ という解があることも見て取れる。この解を**自明な解** (trivial solution) という。）

7 章練習問題

(7-1) （標準）次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z + w = 3 \\ 3x - 5y + 2z + 4w = -2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x - 2y + z - 2w = 1 \\ x - y + z + w = 4 \\ -2x + 2y - z + 2w = -3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x + y - 2z + w = 3 \\ -2x - y + 2z - 3w = 1 \\ x + 2y - 4z = 9 \end{cases}$$

(7-2) （標準）

(1) $0 \leq \alpha \leq \beta < \pi$ とする。2 点 $A\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{pmatrix}$ に対して、ある一次変換が点 A を点 B に、かつ、点 B を点 A に移したとする。この一次変換を求めよ。

(2) この一次変換を図形的に（「回転」「線対称」などの言葉を用いて）説明せよ。

(7-3) （標準）次の連立方程式が、自明でない解を持つための条件を求めよ。

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ ax + by + cz &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 0 \end{cases}$$

(7-4) （標準）次の連立方程式が解を持つための条件を求め、解を求めよ。

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w &= a \\ x - 2y - z - 2w &= b \\ 2x - 3y + z + w &= c \\ 3x - 5y - w &= d \end{cases}$$