

5 正方行列

5-1. 正方行列，単位行列

行の数と列の数が等しい行列を正方行列 (square matrix) という。 n 行 n 列行列というかわりに「 n 次正方行列」という。

対角成分 (左上から右下にかけての対角線上にある成分、 (i, i) 成分) がすべて 1 で、そのほかの成分が 0 であるような行列を単位行列という。

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

混乱の恐れがなければ、ただ E と書くのが普通である。なお、 E_n に現れる大きな 0 の文字は、「このあたりの成分はすべてゼロ」という記号であり、広く使われている。教科書によっては、 I や I_n を使う場合もある。(I は identity: 恒等の頭文字。) E というのは、群論における単位元 (unit element) を多くの場合 e で書き表すところからきていると考えられる。(ドイツ語の「単位 = Einheit」の頭文字である。)

E の (i, j) 成分は、 $i = j$ ならば 1 であり、 $i \neq j$ であれば 0 である。そのことを言い表す記号として δ_{ij} があり、クロネッカーのデルタと呼ばれている。(δ_j^i と書くこともある。これはテンソル代数でよく使われる。)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

単位行列 E の性質

・ A を m 行 n 列の行列とするとき、 $AE_n = E_m A = A$ である。

証明

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik}$ であることから、直ちに従う。

(例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

5-2. 逆行列 (inverse matrix)

n 次正方行列 A に対して $AB = BA = E$ となる行列 B が存在するとき、これを A の逆行列 (inverse matrix) といって、 A^{-1} で書き表わす。

(注意)

逆行列はいつでも存在するとは限らない。しかし、もし存在するならば、ただ一つ存在する。

(例) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない。実際に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を a, b, c, d について解いてみると、解がないことがわかる。

行列 A が逆行列を持つとき、 A は正則 (non-singular(非特異)) であるという。非特異という言葉は行列にはあまり使われず、もっぱら正則という。

2×2 行列のときは $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ という公式があるこ

とはよく知っているだろう。ここで、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則である必要十分条件は

$ad - bc \neq 0$ である。一般の $n \times n$ 行列においても $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (*)$ という形の公式があり (余因子行列の章を参照のこと) A が正則である必要十分条件は $\det A \neq 0$ である。

命題

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A, B が正則だとすると、 AB も正則であって、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である。

1 の証明

$A^{-1} = B$ とすると A は $BA = AB = E$ を満たす。これを B 中心に見直すと、 $A = B^{-1}$ ということになるが、つまり、 $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ となる。

2 の証明

AB の逆行列があるかどうかはすぐにはわからないので、次のような式変形をする。

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

$$ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

この2式により、 AB には逆行列が存在し、それは $B^{-1}A^{-1}$ であることがわかる。

5-3. 対角行列 (diagonal matrix)、スカラー行列 (scalar matrix)

正方行列 A において (i, i) 成分を対角成分という。対角成分以外はすべて 0 であるような行列を対角行列という

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$Diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ と書くこともある

cE の形の行列をスカラー行列という。(スカラーという言葉は、ベクトルと相対する概念の呼び方であって、実数や複素数などの数のことを指す。スカラー行列と積を取ることは結局定数倍と変わらないのでこのように呼ばれる。)

5-4. トレース (trace) ($\text{Tr}A$, $\text{tr}A$)

n 次正方行列 A が $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ と与えられているとする。このとき、 A のトレース (trace) を

$$\text{Tr}A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

により定義する。 2×2 行列であれば、

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

である。($\text{tr}A$ と書かれることもある。古い教科書には固有和 (こゆうわ)、Spur、跡 (せき) などという呼び名もある。)

トレースの性質

1. $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}A + \text{Tr}B$
2. $\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}A$
3. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

証明

1. $A = (a_{ij})_{(i,j)}, B = (b_{ij})_{(i,j)}$ とすると、 $A + B$ の (i, j) 成分は、 $a_{ij} + b_{ij}$ である。

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^n (A+B \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ &= \text{Tr}A + \text{Tr}B\end{aligned}$$

2. $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ ならば cA の (i, j) 成分は ca_{ij} だから、

$$\begin{aligned}\text{Tr}(cA) &= \sum_{i=1}^n (cA \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{i=1}^n ca_{ii} \\ &= c \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ &= c\text{Tr}A\end{aligned}$$

3. $A = (a_{ij})_{(i,j)}, B = (b_{ij})_{(i,j)}$ とする。 AB の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ であるから、

$$\begin{aligned}\text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} \right)\end{aligned}$$

一方で、 BA の (j, k) 成分は $\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ik}$ であって、

$$\begin{aligned}\text{Tr}(BA) &= \sum_{j=1}^n (BA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}\end{aligned}$$

したがって、 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ である。

5-5. べき (冪/巾)

正方行列 A に対して
 n : 正の整数に 対して

$$A^n = AA \dots A (n \text{ 個の積})$$

A^{-1} が存在するとき (A が正則のとき)

$$A^{-n} := (A^{-1})^n$$

とする。また、定義として、 $A^0 = E$ と定める。以上のようにすると、通常のべきと同様に、

$$\begin{aligned} A^l A^k &= A^{l+k} \\ (A^l)^k &= A^{lk} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(注意) 一般には、 $(AB)^k \neq A^k B^k$ である。(もちろん、たまたま一致するということはありうる。) というのは、 $(AB)^k = ABAB \dots AB$ であって、 A と B とが交換可能とは限らないからである。もし $AB = BA$ であるならば $(AB)^k = A^k B^k$ である。

(注意) 行列の場合には、有理数べきはとりあえず考えない。

(注意) 実数の行列べきは考えることができる。たとえば、行列 A について e^A を定義することができる。これは関数 e^x のマクローリン展開をそのまま行列に当てはめる考え方である。実際に、

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

がその定義である。ただし、右辺は行列の和に関する無限級数であり、「行列の各成分が有限の値に収束する場合にのみ e^A を考慮する」と解釈する。(実際にはそのような心配は無用なのであるが、一般論としてそのように考えるのである。) この章ではこの項目についてこれ以上深入りしない。

5 章練習問題

- (5-1) (標準) 2×2 行列の中で $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形で書き表されるもののみを考え、そのような行列全体の集合を C と書くことにする。つまり、

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

と定義する。

- (1) (標準) このとき、 C は行列の積・和について閉じていることを示せ。
- (2) (標準) C の元 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ と複素数 $a + bi$ とを対応させると C と複素数全体 \mathbb{C} とは完全に 1 対 1 に対応しており (これを全単射であるという) C における積・和と複素数における積・和が完全に対応している (これを準同型であるという) ことを確かめよ。(全単射であるような準同型を同型であるという。このように、演算を有する集合を行列の集合と対応つけて考えることを「行列による表現」(matrix representation) と呼ぶ。)
- (5-2) 正方行列 A に対し、ある自然数 r が存在して $A^r = O$ であるときに、 A はべき零であるという。
- (1) (標準) A がべき零ならば、 A は正則行列ではないことを示せ。
- (2) (やや難) A がべき零ならば、 $A - E$ と $A + E$ とは正則行列であることを示せ。
- (5-3) (標準) 正方行列 X, Y であって、 $XY - YX = E$ を満たすものは存在しないことを示せ。

- (5-4) (標準) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、 $A = P^{-1}BP$ を満たすような行列 P が存在しないことを示せ。

- (5-5) (やや難) 正方行列 P が ${}^tPP = E$ をみたし (このような行列を直交行列という) かつ $P + E$ は正則であるとする。以下の問いに答えよ。
- (1) $(P^{-1} + E)^{-1}(P^{-1} - E) = -(P - E)(P + E)^{-1}$ を示せ。
- (2) $A = (P - E)(P + E)^{-1}$ とすれば ${}^tA = -A$ が成り立つことを示せ。
- (3) $E - A$ が正則行列であることを示せ。
- (4) $(E - A)^{-1}(E + A) = P$ を示せ。

(5-6) (やや難) 正方行列 A が ${}^tA = -A$ をみたし(このような行列を交代行列という) かつ $E - A$ が正則であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) $P = (E + A)(E - A)^{-1}$ とすれば、 ${}^tPP = E$ であることを示せ。

(2) $P + E$ が正則行列であることを示せ。

(3) (難) 正方行列が ${}^tA = -A$ を満たすときには $E - A$ はいつでも正則行列であることを示せ。

(5-7) (標準) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ (n 次正方行列) としたと

き、 A^n を求めよ。(ヒント: $A - E = B$ と置いて、 B^2, B^3, \dots を求めてみよ。)

(5-8) (標準) A を n 次正方行列(正則とは限らない)とするときに、 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(5-9) 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のすべての成分が整数であるとせよ。式を簡単にするため、 $p = a + d, q = ad - bc$ とおく。

(1) (標準) $A^2 = E$ となる A であって、 $\pm E$ 以外のものはあるか。あるならばその例を 2 つ挙げよ。

(2) (やや難) $A^3 = E$ かつ $A \neq E$ となる A について、 p, q の取りうる値を求めよ。

(3) (難) $A^5 = E$ かつ $A \neq E$ となる A が存在しないことを示せ。

(4) (かなり難) $A \neq E, A^2 \neq E, \dots, A^{k-1} \neq E, A^k = E$ となる A が存在するのは、 $k = 2, 3, 4, 6$ の場合に限ることを示せ。

(5-10) (やや難) n 次正方行列 A が「任意の行列 X に対して $AX = XA$ を満たす」という性質を持つならば、 A はスカラー行列であることを示せ。

(5-11) (標準) A, C は正方行列とするとき、行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ が正則行列ならば A, C の両方が正則行列であることを示せ。また、そのときの逆行列を求めよ。

(5-12) (1) (標準) n 次正方行列 A のある列の成分がすべて 0 であったとしよう。このとき、どのような正方行列 X をもってしても $XA = E$ とはなり得ないことを成分計算により直接証明せよ。

(2) (やや難) n 次正方行列 A のある行の成分がすべて 0 であったとして、どのような正方行列をもってしても $XA = E$ とはなり得ないことを示せ。こちらはやや機転が必要である。行列式などの未習事項を用いてもよいが、用いずとも証明できる。

(5-13) 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ について、「3 次のケーリー・ハミルトンの公式」を導出してみよう。

$$A^3 - (\text{トレース})A^2 + (\text{何か})A + (\text{行列式})E = O \quad ()$$

の形であることが想像される。この場合、トレース $= a_{11} + a_{22} + a_{33}$ である。「何か」の部分 p をおくことにして、 p を具体的に求めてみよう。上の式を

$$A(A(A - (\text{トレース})E) + pE) = (\text{行列式})E \quad ()$$

の形に変形し、 $A(A - (\text{トレース})E) + pE$ の (i, j) 成分を b_{ij} 、 $()$ の (i, j) 成分を c_{ij} と書くことにする。

- (1) b_{11}, b_{21}, b_{31} を求めよ。
- (2) c_{21} をもとめ、 $()$ に当てはめることにより、 p を具体的に求めよ。そして、 c_{11}, c_{31} についても $()$ が正しくもとまっていることを検算せよ。
- (3) ここで求めた p は A によって定まるので、改めて $f(A)$ と書くことにしよう。このとき、任意の正則行列について

$$f(P^{-1}AP) = f(A)$$

であることを証明せよ。(直接の成分計算をしてもよいが、しないほうが簡単に解ける。)