# 数学２演習（阿原：５月２８日）解説

## 問題 [I]（4 点）

次の行列の階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & 1 & -8 \\ -2 & -2 & 7 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

**（解説）**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & 1 & -8 \\ -2 & -2 & 7 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -2 & 1/3 & -8/3 \\ -2 & -2 & 7 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -2 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & -4/3 & 3 & 17/3 & -7/3 \\ 0 & 3 & -11 & 0 & -9 \\ 0 & 13/3 & -14 & -17 & -20/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 3 & 17/3 & -7/3 \\ 0 & 3 & -11 & 0 & -9 \\ 0 & 13/3 & -14 & -17 & -20/3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/4 & -17/4 & 7/4 \\ 0 & 3 & -11 & 0 & -9 \\ 0 & 13/3 & -14 & -17 & -20/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/4 & -17/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & -17/4 & 51/4 & -57/4 \\ 0 & 0 & -17/4 & 51/4 & -57/4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17/4 & 51/4 & -57/4 \\ 0 & 0 & -17/4 & 51/4 & -57/4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -51/17 & 57/17 \\ 0 & 0 & -17/4 & 51/4 & -57/4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -51/17 & 57/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以上より階数は 3。

## 問題 [J]（4 点）

次の行列の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & +2 & -1 \end{pmatrix}$$

**（解説）**

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

答えは $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である。

# 問題 [K]（12 点）

次のような装置がある。一列に並んだ 4 つのランプとランプごとに押しボタンのスイッチがついている。ランプとスイッチには便宜上左から A, B, C, D と名前がついている。押しボタンスイッチを押すと、そのボタンのランプと両隣のランプについて、オン・オフが入れ替わる。たとえば B のスイッチを押せば、A, B, C のランプのオン・オフが入れ替わる。

さて、最初に任意のオン・オフの配列が与えられたときに、すべてのランプをオフにすることができるかを考えよう。そのために、「オン・オフ」に対応する「二項代数 $F_2$」というものを考える。二項代数は整数を「2 で割ったあまりですべてを考える代数」であり、$F_2 = \{0, 1\}$ である。和と積は

$$
\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}
$$

で定められるとする。$F_2$ を成分とする $4 \times 4$ 行列

$$
A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

を考え、二項代数の計算で逆行列を求めることを考えよう。

**(1)** （3 点）掃き出し法を用いて $A_4$ の逆行列を求めよ。（0 と 1 しか用いないことに注意せよ。）

**(2)** （3 点）ランプのオンを 1、オフを 0 と対応させる。ボタンを「押す」を 1 に、「押さない」を 0 に対応させる。任意に与えられたオン・オフの配列 $(a_1, a_2, a_3, a_4)$（ただし、$a_1, a_2, a_3, a_4$ は $0, 1$ のいずれか）に対して、ボタンの押し方に関する連立方程式を立式して, どのようにボタンを押せばよいかを求める方法を考えよ。

**(3)** （4 点）ランプとボタンが 2 つのとき、3 つのとき、5 つのときはどうか。$A_4$ の類推から $A_2, A_3, A_5$ を自分で定義し、逆行列が存在するかどうかを調べよ。逆行列が存在するなら求めよ。場合によっては $A_6$ についても調べてみよ。

**(4)** （難）（2 点）一般の $n \geq 2$ について、$A_n$ が正則であるための $n$ の条件を求め、証明せよ。

**(参考)** （あくまで参考です。）ランプとボタンが長方形状に並んでいる場合はどうか。（そのボタンのランプと隣接するランプについて、オン・オフが入れ替わるとする。）たとえば $5 \times 5$ に並んでいる場合には、$A_n$ のかわりにどのような行列を考えればよいか。またそれは正則であるか。

**（解説）**

**(1)**

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & & & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & 1 & & & & 1
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & & & & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & & & & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & 1
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

よって答えは $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

**(2)** $x_1, x_2, x_3, x_4$ をそれぞれボタンを「押す＝１、押さない＝０」の値だとすると、

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = a_3 \\ x_3 + x_4 = a_4 \end{cases}$$

という連立方程式が成り立つ。これを行列の言葉で書くと、

$$A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

となり、ボタンの押し方が求められる。

**(3)** $A_2, A_5$ が正則でないことは直ちに確かめられる。$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。ちなみに

$$A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

**(4)** 行列 $A_n$ のランクを考える。$n \geq 5$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 1 & 0 & & \\
1 & 1 & 1 & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right) \\
\longrightarrow
&\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 1 & 0 & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right) \\
\longrightarrow
&\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & & & \\
 & & & & A_{n-3}
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

であるから、$\mathrm{rank}A_n = \mathrm{rank}A_{n-3} + 3$ である。$n \equiv 2(\mathrm{mod}.3)$ の時には $\mathrm{rank}A_n = n - 1$ であるから、これは正則ではない。それ以外の時には $\mathrm{rank}A_n = n$ であり、正則である。

（参考）の詳細は「数学セミナー２００７年９月号」を参照のこと。$5 \times 5$ のときには $25 \times 25$ 行列を考えることになるが、そのランクは 23 であり、正則ではない。