

数学2演習(阿原:5月28日)

問題 [I] (4点)

次の行列の階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & 1 & -8 \\ -2 & -2 & 7 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 [J] (4点)

次の行列の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & +2 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 [K] (12点)

次のような装置がある。一列に並んだ4つのランプとランプごとに押しボタンのスイッチがついている。ランプとスイッチには便宜上左からA, B, C, Dと名前がついている。押しボタンスイッチを押すと、そのボタンのランプと両隣のランプについて、オン・オフが入れ替わる。たとえばBのスイッチを押せば、A, B, Cのランプのオン・オフが入れ替わる。

さて、最初に任意のオン・オフの配列が与えられたときに、すべてのランプをオフにすることができるかを考えよう。そのために、「オン・オフ」に対応する「二項代数 F_2 」というものを考える。二項代数は整数を「2で割ったあまりですべてを考える代数」であり、 $F_2 = \{0, 1\}$ である。和と積は

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

で定められるとする。 F_2 を成分とする 4×4 行列

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考え、二項代数の計算で逆行列を求めることを考えよう。

- (1) (3点) 掃き出し法を用いて A_4 の逆行列を求めよ。(0と1しか用いないことに注意せよ。)
- (2) (3点) ランプのオンを1、オフを0と対応させる。ボタンを「押す」を1に、「押さない」を0に対応させる。任意に与えられたオン・オフの配列 (a_1, a_2, a_3, a_4) (ただし、 a_1, a_2, a_3, a_4 は0,1のいずれか) に対して、ボタンの押し方に関する連立方程式を立式して、どのようにボタンを押せばよいかを求める方法を考えよ。
- (3) (4点) ランプとボタンが2つのとき、3つのとき、5つのときはどうか。 A_4 の類推から A_2, A_3, A_5 を自分で定義し、逆行列が存在するかどうかを調べよ。逆行列が存在するなら求めよ。場合によっては A_6 についても調べてみよ。
- (4) (難)(2点) 一般の $n \geq 2$ について、 A_n が正則であるための n の条件を求め、証明せよ。
- (参考) (あくまで参考です。) ランプとボタンが長方形状に並んでいる場合はどうか。(そのボタンのランプと隣接するランプについて、オン・オフが入れ替わるとする。) たとえば 5×5 に並んでいる場合には、 A_n のかわりにどのような行列を考えればよいか。またそれは正則であるか。