6　行列の基本変形

6-1 基本変形

行列の基本変形とは次の 6 種類の操作のことをいう。行列の基本操作は行列のサイズに関りなく行うことができる。

1. $L1(i,j)$: 第 i 行と第 j 行とを入れ替える。($i \neq j$ とする。)
2. $L2(i,c)$: 第 i 行を c 倍する。(c は 0 でない定数であるとする。)
3. $L3(i,j;c)$: 第 j 行の c 倍を第 i 行に加える。($i \neq j$ とする。)
4. $R1(i,j)$: 第 i 列と第 j 列とを入れ替える。($i \neq j$ とする。)
5. $R2(i,c)$: 第 i 列を c 倍する。(c は 0 でない定数であるとする。)
6. $R3(i,j;c)$: 第 i 列の c 倍を第 j 列に加える。($i \neq j$ とする。)

$L1, L2, L3$ を行の基本変形、$R1, R2, R3$ を列の基本変形という。ここで、行列 P_n, Q_n, R_n を以下のように定義することにより、基本変形は行列の積で与えられることがわかる。

$$P_n(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

(ただし、点線の行は上から第 i 行、第 j 行とし、点線の列は左から第 i 列、第 j 列とする。)

$$Q_n(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

（ただし、$c \neq 0$ とし、点線の行は第 i 行とし、点線の列は第 i 列とする。）

$$R_n(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

（ただし、点線の行は第 i 行とし、点線の列は第 j 列とする。）

定理

(1) P_n, Q_n, R_n はいずれも正則行列である。

(2) 行の基本変形 $L1, L2, L3$ はそれぞれ行列の左から P_n, Q_n, R_n を掛けることと同じである。

(3) 列の基本変形 $R1, R2, R3$ はそれぞれ行列の右から P_n, Q_n, R_n を掛けることと同じである。

（注意）この定理の証明はさほど難しくないが, この定理の意味合いのほうが大切である。つまり、「行列 A に何回かの基本変形によって行列 B が得られる。」という事柄は、「$XAY = B$ となる正則行列 X, Y が存在する」と言い換えることができる。もちろんここでの X, Y は上の P_n, Q_n, R_n の何回かの積で表わされることは言うまでもない。

6-2. 掃きだし法

与えられた行列 $A=(a_{ij})_{(i,j)}$ の (p,q) 成分が 0 でないとき、次の作業を行うことを「行列 A に対する $(p.q)$ に関する列の掃きだし」という。

（作業 1） 第 p 行を $1/a_{pq}$ 倍する。（$L2(p,1/a_{pq})$ を行う。）

（作業 2） 第 1 行に第 p 行の $-a_{1p}$ 倍を加えて $(1,p)$ 成分を 0 にする。（$L3(1,p;-a_{1p})$ を行う。）

第 2 行に第 p 行の $-a_{2p}$ 倍を加えて $(2,p)$ 成分を 0 にする。（$L3(2,p;-a_{2p})$ を行う。）

以下同様の作業を第 p 行以外の行に対して行う。この作業により、(p,q) 成分は 1 に、行列の第 q 列は、(p,q) 成分を除きすべてが 0 になる。

同じような考え方で、「(p,q) に関する行の掃きだし」を行うことが出来る。この作業により、(p,q) 成分は 1 に、行列の第 p 行は、(p,q) 成分を除きすべてが 0 になる。

掃きだしの実例

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ を $(2,2)$ に関して列の掃きだしを行う。

（作業 1） 第 2 行を 1/2 倍して、$(2,2)$ 成分を 1 にする。

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

（作業 2-1） 第 2 行の -4 倍を第 1 行に加えて、$(1,2)$ 成分を 0 にする。

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

（作業 2-2） 第 2 行の 2 倍を第 3 行に加えて、$(3,2)$ 成分を 0 にする。

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

以上により第 2 列は $(2,2)$ 成分を除いてすべて 0 になった。

6-3 標準形と階数

（定理）

任意の行列は基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right)$$

の形にすることができる。これを行列の標準形という。標準形に表れる 1 の個数が r のとき、この標準形を $F(r)$ と書くことにする。

（注意）零行列 O はこのままで $F(0)$ という標準形であるとみなす。

（証明）次の手順を $i = 1, 2, \cdots$ について行えば、任意の行列は標準形に変形することが出来る。

手順 1: 第 i 行以下、第 i 列以右の成分に 0 しかなければそこで作業は終了。さもなければ手順 2 へ進む。

手順 2: 行の交換・列の交換を適宜行って、第 (i, i) 成分が 0 でないようにする。手順 3 へ進む。

手順 3: (i, i) に関する行の掃きだし・列の掃きだしを行う。i を 1 つ増やし, **手順１**へ戻る。

この一連の手順により、左上から (i, i) 成分は 1 に、そのほかは 0 であるような行列へと変更される。第 i 行以下、第 i 列以右の成分に 0 しかなければその時点で標準形が出来上がっているのである。

（例）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} && \text{1 列と 2 列を交換} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} && (1,1)\ \text{に関して行の掃きだし} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} && (1,1)\ \text{に関して列の掃きだし} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} && \text{第 2 行を 1/2 倍} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} && (2,2)\ \text{に関して行の掃きだし} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (2,2)\ \text{に関して列の掃きだし} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{終了}
\end{aligned}$$

次の定理は重要である。また、階数 (rank) の定義も与えている。

（定理）

任意の行列 A に対して、その標準形 $F(r)$ はひととおりに定まる。このときの r を行列 A の階数 (rank) といい、$\mathrm{rank}(A)$ と表記する。

（注意）上の計算により、

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

である。

（注意）掃き出し法の手順を指定しているのだから、標準形がひととおりに定まることは当然とも思えるが, この定理の主張するところは「どのような手順で標準形を求めても、その最終形は一致する」ということである。

（証明）

基本変形を与える行列はすべて正則行列であり、行列 A の左右からこれらを掛けることにより基本変形を行うことが出来た。したがって、一つの行列 A から基本変形を行い、二つの基本変形 $F(r)$ と $F(s)$（ただし $r < s$）が得られたと仮定して矛盾を導こう。問題設定より、基本変形を与える行列たちの積で表わされるような正則行列 B, C, B', C' が存在して、

$$BAC = F(r), \quad B'AC' = F(s)$$

と表わせる。この 2 式を変形して

$$A = B^{-1}F(r)C^{-1}, \quad A = {B'}^{-1}F(s){C'}^{-1}$$

を得る。したがって、

$$F(s) = B'B^{-1}F(r)C^{-1}C'$$

を得る。これらの行列を「第 r 行以上とそれより下」「第 r 列以左とそれより右」というブロックに分けて表示することにする。つまり、

$$B'B^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right), C^{-1}C' = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

とおく。（B_{11} と C_{11} は $r \times r$ 行列である。）すると、$r < s$ に注意すれば、

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & F(s-r) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

と書き直すことが出来る。この右辺を計算しよう。

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & O \\ \hline B_{21} & O \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} B_{11}C_{11} & B_{11}C_{12} \\ \hline B_{21}C_{11} & B_{21}C_{12} \end{array}\right) \end{aligned}$$

と求まる。これを上の式と比較すると、まず $B_{11}C_{11} = E_r$ である。すなわち、B_{11} と C_{11} はどちらも正則行列であることを意味している。次に右上を見ると $B_{11}C_{12} = O$ であるが B_{11} が正則なことから $C_{12} = O$ である。同様に左下の部分を見ると C_{11} が正則なことから $B_{21} = O$ である。

以上より、$B_{21}C_{12} = O$ であり、これが $F(s-r)$ に等しくなければいけない。したがって、$s > r$ ということはありえず、$r = s$ が示された。（証明終わり）

（注意）

階数の定義は以上のとおりであり、実際に与えられた行列に対して階数を求めるのには都合のよい定理である。しかし、数学的な意味はこれでは分かりにくい。未習の用語も含まれるが、階数の同値な定義を紹介することにしよう。

（定理） 以下の 4 つの数は等しい。

- 行列の A の階数
- 行列 A を列ベクトルの並び $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ であると考えたときに、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中で互いに線形独立なものの個数の最大数。
- 行列 A を行ベクトルの並び $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$ であると考えたときに、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の中で互いに線形独立なものの個数の最大数。
- 線形写像 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像の次元。

6-4 基本変形と逆行列

基本変形を使って逆行列を求める方法について紹介する。

（命題）

(1) n 次正方行列 A が正則であることと、rank $A = n$ とは必要十分条件である。

(2) n 次正方行列 A が正則であるならば、A は左基本変形（行の基本変形）だけで標準形（この場合は単位行列）へと変形できる。

（証明）(1) $(\Leftarrow)$

rank $A = n$ であると仮定する。基本変形を表わす行列たちの積 P, Q が存在して、$PAQ = F(n) = E_n$ が成り立つ。この式を変形して $A = P^{-1}Q^{-1}$ であり、P^{-1}, Q^{-1} は正則だから A も正則である。

$(\Rightarrow)$

A が正則であると仮定する。rank $A = r$ とすると、基本変形を表わす行列たちの積 P, Q が存在して、$PAQ = F(r)$ が成り立つ。左辺は正則行列の積であるから正則である。一方で、もし $r < n$ であるならば、$F(r)$ の第 n 行はすべて 0 であり、そのような行列には逆行列は存在しない。（もし逆行列 B が存在すると仮定して、$F(r)B$ の (n, n) 成分が 1 になりうるかを考えてみれば、それは決してならない。つまり逆行列が存在しないことが分かる。）したがって $r = n$ である。（証明終わり）

(2) 上で示したように、$A = P^{-1}Q^{-1}$ である。これを変形して $(QP)A = E$ である。ここで、QP は基本変形を表わす行列の積であるから、A は行の（左）基本変形のみで単位行列へと変形できることが分かる。（証明終わり）

（基本変形による逆行列の求め方。）

与えられた行列 A と同じ大きさの単位行列 E とを並べて書いて $n \times 2n$ 行列を作る。つまり、$\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right)$ を考える。この行列の左半分を行の基本変形だけで標準形にすることを考える。

もし、左半分のある行の成分がすべて 0 になってしまったら、A は正則でないことが分かる。

もし、左半分が標準形 $F(n) = E$ へと変形できたとする。このとき、ある正則行列 P が存在して、$PA = E$ と書けていることになるが、このことはすなわち $P = A^{-1}$ を意味する。一方で、

$$P \left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} PA & P \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \right)$$

と計算できるから、右半分は A の逆行列が計算されていることが分かる。

（例）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

基本変形の手順のみを示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ((1,1)\text{ に関する列の掃きだし})$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{第 2 行と第 3 行の交換})$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ((2,2)\text{ に関する列の掃きだし})$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ((3,3)\text{ に関する列の掃きだし})$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{終了})$$

以上より $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ と求まる。

6章練習問題

(6-1) 次の行列の階数を求めよ。文字を含むものについては値による場合分けも行うこと。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

(6-2) 次の行列が逆行列を持つかどうかを判定せよ。もし逆行列を持つならば求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} & a_1 \\ & 1 & & & a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ \text{\Large 0} & & & & 1 \end{pmatrix}$