数学２演習（阿原：５月１４日）

問題 [F] （5 点）

平面上にあって原点を通るような傾き θ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ の直線を ℓ とする。ℓ に関する線対称移動を以下の方法で導出せよ。任意に与えられた $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、P を $(-\theta)$ 回転したものを Q、Q を x 軸対称したものを R、R を θ 回転したものを S をする。S が求める線対称移動後の点である。$P \mapsto Q \mapsto R \mapsto S$ を１次変換の合成とみなしてこれを１つの行列で書き表してみよ。

問題 [G] （5 点）

(1) （２点）実数の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ とあらわせることを示せ。

(2) （３点）n 次実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $n \times n$ 行列 A に対して、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b})$$

を示せ。

問題 [H] （10 点）

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**すべての成分が整数**であるとせよ。式を簡単にするため $p = a + d, q = ad - bc$ とおく。ケーリー・ハミルトンの公式

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

は既知としてよい。

(1) （４点）$A^2 = E$ となる A であって、$\pm E$ 以外のものがある。その例を２つ挙げよ。

(2) （４点）$A^3 = E$ かつ $A \neq E$ となる A について、p, q のとりうる値を求めよ。

(3) （２点）$A^5 = E$ かつ $A \neq E$ となる A が存在しないことを示せ。

(参考) （かなり難につき、設問外）$A \neq E, A^2 \neq E, \cdots, A^{k-1} \neq E, A^k = E$ となる A が存在するのは $k = 2, 3, 4, 6$ の場合に限る。