4 行列

4-1 行列の演算

定義（行列）

( ) で囲まれた、n 行、m 列の数の並びを行列という。一つ一つの数を成分という。成分は、実数や複素数であることが普通だが、発展的な意味では、多項式、関数、作用素なども行列の成分となりうる。

（例）

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列において、横の並びを**行**、縦の並びを**列**と言う。行は上から第 1 行、第 2 行、列は左から第 1 列、第 2 列、のように呼ぶ。i 行 j 列の数のことを行列の (i, j) **成分** (element) という。m 個の行からなり n 個の列からなる行列を m 行 n 列行列という。($m \times n$ 行列ともいう。）また、この (m, n) を行列の**サイズ**という。

n 行 1 列の行列 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を (n 次) 列ベクトルと呼ぶ。　1 行 n 列の行列 $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ を (n 次) 行ベクトルと呼ぶ。ちなみに、1 行 1 列も行列として扱うが、通常の数と同じように考える。

定義（行列の和）

サイズの同じ行列は和（または差）をとることができる。つまり、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

が定義される。また、行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と定数 c に対して、「行列の定数倍」は

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

により定義される。

定義（行列の積）

A を l 行 m 列の行列とし、B を m 行 n 列の行列とする。（A の列数と B の行数が一致していなければいけない。）a_{ij} を A の (i,j) 成分、b_{jk} を B の (j,k) 成分であるとしよう。このとき、積 AB の (i,k) 成分 c_{ik} は

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{mk} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \end{aligned}$$

注意

AB は l 行 n 列の行列になる。一般に、AB が存在しても BA が存在するとは限らない。A が n 行 m 列の行列、B が m 行 n 列の行列のときには、AB も BA の存在するが、サイズは異なる。

注意

列ベクトルも行列の一種と考えることにより、行列と列ベクトルの積も「行列の積」とみなすことができる。

注意

行列 A の (i,j) 成分が a_{ij} であったとき、これを $A=(a_{ij})$ と書く教科書もある。しかし、「a_{ij} が何なのか」が明らかでないときには使わないほうがよい。例えば、 (a_{ji}) や (a_{jk}) と書いたとき、これらがどこの成分を表わしているかは自明ではない。「(i,j) 成分が a_{ij}」という書き方はたとえば $(a_{ij})_{(i,j)}$ と書く方法もある。これならばまぎれることはない。

零行列 (zero matrix) というのは、すべての成分が 0 であるような行列のこととする。記号は O（大文字のオー）を用いる。

$$O=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

和・積の性質

以下、A,B,C は行列、c,d は定数とする。行列の和、積については、それぞれ定義できるサイズをもっているものとする。

1. 交換則 (commutativity):$A+B=B+A$
2. 結合則 (associativity):$(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $c(A+B)=cA+cB, (c+d)A=cA+dA,$
4. $(cd)A=c(dA)$
5. 結合則 (associativity):$(AB)C=A(BC)$
6. $c(AB)=(cA)B=A(cB)$
7. $(A+B)C=AC+BC, A(B+C)=AB=+AC$
8. $AO=O, OA=O$

これらの公式が正しいことは成分を計算してみることにより容易に確かめることができる。少し難しいのは $(AB)C = A(BC)$ であろう。この証明をしておこう。

$A = (a_{pq})_{(p,q)}$(k 行 ℓ 列)
$B = (b_{qr})_{(q,r)}$(ℓ 行 m 列)
$C = (c_{rs})_{(r,s)}$(m 行 n 列)
とした時
AB の (p,r) 成分は

$$a_{p1}b_{1r} + a_{p2}b_{2r} + \ldots + a_{pm}b_{mr} = \sum_{q=1}^{\ell} a_{pq}b_{qr}$$

したがって、$(AB)C$ の (p,s) 成分は

$$\sum_{r=1}^{m}(AB \text{ の } (p,r) \text{ 成分})c_{rs} = \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{\ell} a_{pq}b_{qr}\right)c_{rs} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{\ell}(a_{pq}b_{qr}c_{rs})$$

(最後の等号は、分配法則を使って c_{rs} をシグマの中に入れた（展開した) のである。)

一方、$A(BC)$ の (p,s) 成分は

$$\sum_{q=1}^{\ell} a_{pq}(BC \text{ の } (q,s) \text{ 成分}) = \sum_{q=1}^{\ell} a_{pq}\left(\sum_{r=1}^{m} b_{qr}c_{rs}\right) = \sum_{q=1}^{\ell}\sum_{r=1}^{m}(a_{pq}b_{qr}c_{rs})$$

ここでも、最後の等号は、分配法則を使って a_{pq} をシグマの中に入れた（展開した) のである。シグマが二つ並んでいるが、今の場合にはこれらは有限項の和であるので、足す順番を交換することができる。したがって $\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{\ell}$ と $\sum_{q=1}^{\ell}\sum_{r=1}^{m}$ は等価である。以上より、$(AB)C$ と $A(BC)$ とは成分が一致するので、等しいことが証明された。

注意

一般に無限項の和（無限級数) の足す順番を変更することはできない。無限 2 重数列の級数は足す順番によって値が変わってしまうことがあるからである。

4-2 転置行列 (transposed matrix)

行と列の成分を入れ替えた行列を転置行列という。記号は ${}^tA$ である。

(例) $${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

転置行列の性質

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3. ${}^t(cA) = c{}^tA$
4. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

いくつかを証明する。まず ${}^t({}^tA) = A$ を証明しよう。行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} であるとしよう。${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} である。したがって、${}^t({}^tA)$ の (i,j) 成分は a_{ij} である。したがって、${}^t({}^tA)$ と A は成分が一致するので、同じ行列であるといえる。

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ を証明しよう。行列 A の (i,j) 成分を a_{ij}、行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} であるとしよう。そうすると $A+B$ の (i,j) 成分は $a_{ij}+b_{ij}$ であって、${}^t(A+B)$ の (i,j) 成分は $a_{ji}+b_{ji}$ である。一方で、${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji}、行列 ${}^tB$ の (i,j) 成分は b_{ji} であることから、${}^tA+{}^tB$ の (i,j) 成分は $a_{ji}+b_{ji}$ である。以上より、${}^t(A+B)$ と ${}^tA+{}^tB$ は各成分が一致するので、等しいと言える。

${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ を証明しよう。A の列数（$= B$ の行数）を m とする。行列 A の (i,j) 成分を a_{ij}、行列 B の (j,k) 成分を b_{jk} であるとしよう。そうすると AB の (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}$ であって、${}^t(AB)$ の (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^m a_{kj}b_{ji}$ である。一方で、${}^tB$ の (i,j) 成分は b_{ji}、行列 ${}^tA$ の (j,k) 成分は b_{kj} であることから、${}^tB{}^tA$ の (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^m b_{ji}a_{kj}$ である。以上より、${}^t(AB)$ と ${}^tB{}^tA$ は各成分が一致するので、等しいと言える。

4-3 複素共役行列(complex conjugate matrix)

おのおのの成分を複素共役にした行列を転置行列という。記号は $\overline{A}$ である。

(例) $\overline{\begin{pmatrix} 1+2i & 3 \\ 4-5i & 6i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3 \\ 4+5i & -6i \end{pmatrix}$

複素共役行列の性質

1. $\overline{(\overline{A})} = A$
2. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{(cA)} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = \overline{AB}$

これらの性質は、複素数の共役の性質によるものであるから、証明は簡単である。各自試されたい。

4-4 随伴行列 (adjoint matrix)

転置行列の複素共役行列のことを随伴行列という。記号は A^* である。定義により、$A^* = \overline{({}^tA)} = {}^t(\overline{A})$ である。

(例) $$\begin{pmatrix} 1+2i & 3 \\ 4-5i & 6i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 4+5i \\ 3 & -6i \end{pmatrix}$$

随伴行列の性質

1. $(A^*)^* = A$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(cA)^* = \overline{c}A^*$
4. $(AB)^* = B^*A^*$

これらの証明は転置行列の公式と複素共役行列の公式とを組み合わせれば簡単に示される。各自試されたい。

練習問題4

(4-1) （容易）次の計算をせよ

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $(-1+i)\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 3 & 3 \\ 2+3i & 2-3i \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} x^2-1 & 2x+1 \\ -2y+z & -y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4-2) （容易）実数の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ とあらわせることを示せ。

(4-3) （容易）2 行 2 列の行列 A, B であって、AB と BA とが異なる例を見つけよ。

(4-4) （標準）任意の 2 以上の自然数 n について、n 行 n 列行列 A, B であって、$A \neq O, B \neq O$ であって、かつ $AB = O$ であるような例を提示せよ。

(4-5) （標準）行列に関する次の公式を証明せよ。

1. 交換則 (commutativity):$A + B = B + A$
2. 結合則 (associativity):$(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $c(A + B) = cA + cB, (c + d)A = cA + dA,$
4. $(cd)A = c(dA)$
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
6. $(A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB = +AC$
7. $AO = O, OA = O$

(4-6) （やや難）（線形代数の問題ではないが） 2 重数列 $\{a_{n,m}\}$ $(n, m$ は自然数) であって、

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} \neq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

となる例を提示せよ。

(4-7) （標準）転置行列に関する次の公式を証明せよ。

1. ${}^t(cA) = c\,{}^tA$

(4-8) （標準）複素共役行列に関する次の公式を証明せよ。

1. $\overline{(\overline{A})} = A$
2. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{(cA)} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = \overline{A}\overline{B}$

(4-9) （標準）随伴行列に関する次の公式を証明せよ。

1. ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$
2. $(A^*)^* = A$
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(cA)^* = \overline{c}A^*$
5. $(AB)^* = B^*A^*$

(4-10) （容易）複素列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}$ とあらわせることを示せ。

(4-11) （容易）$n \times n$ 行列 A が $A^* - A = O$ を満たすとき A をエルミート行列というが、A の (i,i) 成分が実数であることを示せ。

(4-12) （標準）n 次実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $n \times n$ 行列 A に対して、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b})$$

を示せ。

(4-13) （標準）n 次複素ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ と $n \times n$ 行列 A に対して、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$$

を示せ。

(4-14) （標準） 4×4 行列を 4 つの 2×2 行列に分けて考えることを**行列の区分け**という。つまり、$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & a' & b' \\ c & d & c' & d' \\ \hline a'' & b'' & a''' & b''' \\ c'' & d'' & c''' & d''' \end{array}\right)$ を

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} a''' & b''' \\ c''' & d''' \end{pmatrix}$$

とみて、これを $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ のように書くのである。このときに次の公式を証明せよ。

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{pmatrix}$$

（$P, Q, R, S, P', Q', R', S'$ はすべて 2×2 行列とする。行列はかける順番にも注意して計算をすること。）

この公式から容易に導ける系として、

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & Q' \\ O & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP' & PQ' + QS' \\ O & SS' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & O \\ O & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP'' & O \\ O & SS' \end{pmatrix}$$

がある。