数学２演習（阿原：４月２３日）問題と解説

総評 :「発展」という問題は、やや高度な思考を必要とする。つまり、高校までの数学の知識や思考過程では解決できない問題であると考えてもらいたい。しかし、発展問題を理解するのに特別に優れた頭脳が必要なわけではない。アタマをリセットして柔らかくしておけば、必ず理解可能な問題である。

問題 [D]（６点）

(1) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ であるとする。線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}$$

を満たすとき、f に対応する行列を具体的に求めよ。

（計算量を減らすようなうまいやり方があるわけではないが, 行列に関する知識をもし先取りしていて、それを使って上手に説明できるのであれば, そういう答案は歓迎である。）

(2) 集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\}$ に属するベクトルをすべて求めよ。

解説 [D]

$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$ とおくと、$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{a}$ より

$$\begin{cases} 2a + b + c &= 1 \\ 2d + e + f &= -1 \end{cases}$$

$f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{b}$ より

$$\begin{cases} 4a + 3b + 2c &= 1 \\ 4d + 3e + 2f &= 0 \end{cases}$$

$f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}$ より

$$\begin{cases} a - b + c &= -1 \\ d - e + f &= 1 \end{cases}$$

これらを解いて

$$\begin{aligned} a &= 4 & b &= -1 & c &= -6 \\ d &= -6 & e &= 2 & f &= 9 \end{aligned}$$

したがって求める行列は

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

である。

（別解）

求める行列を A とすると、

$$A\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。3×3 行列の逆行列を求める方法は未習なのでこの答案を書けなければいけないわけではないが「カッコイイ」答案であることはわかってもらえるだろう。

問題 [E]（１４点）

３つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して１つの実数を対応させるような関数

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}$$

が次の性質を満たすものとする。（性質 1）（性質２）を「線形性」、（性質３）を「交代性」と呼ぶ。

（性質 1） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と任意の実数 p に対して $F(p\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = pF(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$。

（性質 2） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して $F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$。

（性質 3） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \quad F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$。

（性質 4） $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$ である。

以下の問いに答えよ。証明や計算をするときには、どの性質を用いて導いたかを書いておくこと。

(1) $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ を示せ。

(2) $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ を示せ。

(3) $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c})$ を示せ。

(4) $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$ を求めよ

(5) $F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ を求めよ

(6) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ に対して $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ はどのような式になると考えられるか。直接計算により求めよ。（計算の詳細をすべて書くのは大変なので, 計算の手順を上手に説明できれば良い。）

(7) (6) と同じ結果を「一意性」という言葉を用いて証明することを試みよ。（簡単に証明できるとは限らない。こまごました計算をしないで済む、という程度の話である。）

解説 [E]

(1) $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} -F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$

(2) （性質３）より $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ であり、したがって $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ である。

(3) $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} -F(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }2)}{=} -F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - F(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c})$

(4) $F(\boldsymbol{a},p\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} -F(p\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }1)}{=} -pF(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \overset{(\text{性質 }3)}{=} pF(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ である。同様に（性質３）と（性質１）を組み合わせることにより $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},p\boldsymbol{c}) = pF(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を得ることができる。このことより、

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right) = F(\boldsymbol{e}_1,2\boldsymbol{e}_2,3\boldsymbol{e}_3) = 6F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) \overset{(\text{性質 }4)}{=} 6$$

を得る。

(5) （３）と同様の方法により、$F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}')=F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}')$ を得る。このことから、

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) &= (\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\\
&\overset{(3)}{=} F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad +F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad +F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad +F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

（２）と（性質３）を組み合わせることにより、F の括弧の中に同じベクトルが含まれればその値は 0 になる。このことより、この式の値は

$$\begin{aligned}
&= F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&\overset{(1)}{=} F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\
&\overset{(\text{性質 }4)}{=} 2
\end{aligned}$$

(6) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= F(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3,a'\boldsymbol{e}_1+b'\boldsymbol{e}_2+c'\boldsymbol{e}_3,a''\boldsymbol{e}_1+b''\boldsymbol{e}_2+c''\boldsymbol{e}_3)\\
&= aa'a''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+aa'b''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+\cdots
\end{aligned}$$

である。F の括弧の中に同じベクトルが含まれればその値は 0 になる。このことより、この式の値は

$$\begin{aligned}
&= ab'c''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+ac'b''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\\
&\quad +ba'c''F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)+bc'a''F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)\\
&\quad +ca'b''F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+cb'a''F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\\
&= ab'c''+a'b''c+a''bc'-ab''c'-a'bc''-a''b'c
\end{aligned}$$

(7) (6) より $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ であることがわかるので、同じ内容を直接計算を経ずに示す方法について考える。ポイントは次の２点である。（A）（性質１）〜（性質４）を満たすような F は１つしかない。（これを一意性・一意的という。）（B）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は（性質１）〜（性質４）を満たす。この二つを示せれば $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ が求める（ただ１つの）式であることが示される。

（A）の証明：（６）の最初の計算により

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= F(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_3,a'\boldsymbol{e}_1+b'\boldsymbol{e}_2+c'\boldsymbol{e}_3,a''\boldsymbol{e}_1+b''\boldsymbol{e}_2+c''\boldsymbol{e}_3)\\
&= aa'a''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+aa'b''F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+\cdots
\end{aligned}$$

であって、F の値はただ１つに計算されることがわかる。したがって一意的である。

（B）の証明：$((p\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}) = p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

$((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

外積の公式により $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ である。また、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の構成する平行６面体の符号付体積であるから、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$$

である。

直接計算により $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = 1$ である。以上により $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ が求める（ただ１つの）式であることが示された。