数学２演習（阿原：４月９日）解答例・解説

問題 [A] 0 でない複素数 z について、その逆数 $\frac{1}{z}$ もまた複素数であることを示せ。

解説 [A] 問題の意味が少しわかりにくいが、$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ と定義して、$0 \neq z \in \mathbb{C}$ としたときに、$1/z \in \mathbb{C}$ であることを示せ、というのが題意である。

$z = a + bi$ としたときに、$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ であり、$z \neq 0$ という条件から $a^2 + b^2 \neq 0$ であり、$\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ であることから $1/z \in \mathbb{C}$ であることが示される。

問題 [B] 実ベクトルに関するシュヴァルツの不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$ を次の手順で示せ。

(1) まず、t を変数とする関数 $f(t) = ||t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2$ を考え、これを t の多項式で表わせ。（ヒント：$||\boldsymbol{v}||^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$）

(2) 次に、$f(t) \geq 0$ であることを、判別式の条件に書き直せ。

(3) 証明を完結させよ。

(発展) 複素ベクトルについてもシュヴァルツの不等式は成立する。しかし、証明は上のものよりやや複雑である。証明してみよ。

解説 [B]

(1)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= ||t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 = (t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\
&= t^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2 t^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})t + ||\boldsymbol{b}||^2
\end{aligned}
$$

(2) $f(t) \geq 0$ であることことから、判別式は非正である。したがって,

$$D/4 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - ||\boldsymbol{a}||^2 \cdot ||\boldsymbol{b}||^2 \leq 0$$

である。

(3) 上式より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq ||\boldsymbol{a}||^2 \cdot ||\boldsymbol{b}||^2$ であるので、**正の平方根をとることにより** $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$ を得る。

(発展) 上の計算を複素数で行う。

$$\begin{aligned} f(t) &= ||t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 = (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= t\cdot\bar{t}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \bar{t}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \\ &= ||\boldsymbol{a}||^2|t|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t} + ||\boldsymbol{b}||^2 \end{aligned}$$

ここで、実数 s について $t = \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}s$ とおくことにすると、

$$f(t) = ||\boldsymbol{a}||^2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2s^2 + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2s + ||\boldsymbol{b}||^2$$

である。$f(t)$ は任意の s について 0 以上の値をとることから,

$$D/4 = |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^4 - |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2 \leq 0$$

もし $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = 0$ ならばシュヴァルツの不等式はいつでも成立するから $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \neq 0$ の場合を考察すると、$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \leq ||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2$ であるので、**正の平方根をとることにより** $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||$ を得る。（証明終わり）

問題 [C]

（シムソンの定理）平面上の 3 点 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 平面上の点 $P\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ に対して、P から直線 AB へおろした垂線の足 D（垂線と直線 AB との交点、ただし P が直線 AB 上にあるときは $D = P$ であるとする。）を求めよ。

(2) P から直線 AC へおろした垂線の足 E を求めよ。

(3) P から直線 BC へおろした垂線の足 F を求めよ。

(4) もし D, E, F が同一直線上にあるとすると,P はどのような軌跡を描くか？

(発展) 一般の三角形 ABC についても、(4) で観察されるような現象が現れると思うか？

解説 [C]

(1) 直線 AB は y 軸と一致しているので、$D\begin{pmatrix}0\\y_0\end{pmatrix}$ である。

(2) $E\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ とすると、E が直線 AC 上にあることから $y_1 = x_1 + 1$ であり、かつ、$AC \perp EP$ であることから、$(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) = 0$ である。これらを解いて

$$E\begin{pmatrix} (x_0 + y_0 - 1)/2 \\ (x_0 + y_0 + 1)/2 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 解き方は (2) と同じであり、F は

$$F\begin{pmatrix} (9x_0 + 3y_0 - 9)/10 \\ (3x_0 + y_0 + 27)/10 \end{pmatrix}$$

と求まる。

(4) ベクトル DE と DF が平行であることから、

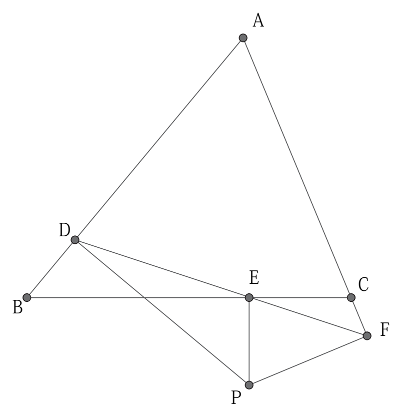
$$((x_0+y_0-1)/2-0)((3x_0+y_0+27)/10-y_0) = ((x_0+y_0+1)/2-y_0)((9x_0+3y_0-9)/10-0)$$

これを計算して

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 2)^2 - 5 = 0$$

である。これは三角形 ABC の**外接円**である。

(発展) シムソンの定理として平面幾何ではよく知られている定理である。三角形の場所や大きさによらずに成り立つことを考えれば、$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおいて、同じ計算をすればよい。もちろん、円周角の性質を用いて平面幾何として証明することも可能である。



図において、３点 D, E, F が同一直線上にあるとする。このとき、４点 B, D, E, P は同一円上にあることから, $\angle DBP + \angle DEP = \pi$ である。

４点 E, C, F, P は同一円上にあることから, $\angle PEF = \angle PCF$ である。$\angle DEP + \angle PEF = \pi$ であることから $\angle DBP = \angle PCF$ であるが、これは４点 A, B, C, P が同一円上にあることを示している。

逆に、４点 A, B, C, P が同一円上にあるならば,$\angle DBP = \angle PCF$、$\angle DBP + \angle DEP = \pi$、$\angle PEF = \angle PCF$ であることより。$\angle DEP + \angle PEF = \pi$ である。これは３点 D, E, F が同一直線上にあることを意味している。以上により、点 P の軌跡は三角形 ABC の外接円である。（証明終わり）