3 外積

3-1 外積(exterior product)

定義（外積）

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ に対して、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ca' - c'a \\ ab' - a'b \end{pmatrix}$$

と定義し、これを空間ベクトルの外積と呼ぶ。

（注意）外積は空間ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ についてだけ定義される。平面ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \cdots$ については定義されない。

定理（外積の性質１）

(1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。（ただし、0 ベクトルのときも「垂直」であると考える。）

(2) $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

(1)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ca' - c'a \\ ab' - a'b \end{pmatrix} \right) \\ &= a(bc' - b'c) + b(ca' - c'a) + c(ab' - a'b) = 0 \end{aligned}$$

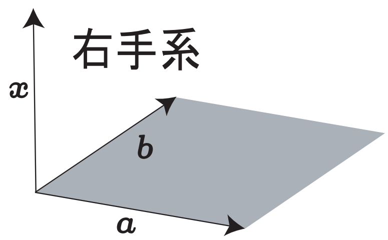
したがって $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ である。$\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に関しても同じような計算で確かめることができる。

(2)

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 = (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2$$
$$b^2c'^2 + b'^2c^2 + c^2a'^2 + c'^2a^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2bb'cc' - 2cc'aa' - 2aa'bb'$$
$$\begin{aligned} &(\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2})^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \\ &= a^2a'^2 + a^2b'^2 + a^2c'^2 + b^2a'^2 + b^2b'^2 + b^2c'^2 + c^2a'^2 + c^2b'^2 + c^2c'^2 \\ &\quad -a^2a'^2 - b^2b'^2 - c^2c'^2 - 2aa'bb' - 2bb'cc' - 2cc'aa' \\ &= a^2b'^2 + a^2c'^2 + b^2a'^2 + b^2c'^2 + c^2a'^2 + c^2b'^2 - 2aa'bb' - 2bb'cc' - 2cc'aa' \end{aligned}$$

以上より $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積の絶対値と等しいことが示された。

ここで、外積の重要な性質を説明するために「右手系」という言葉を導入する。3 つの空間ベクトルを並べて書いたとき、これらが右手系であるとは、「右手の親指・人差し指・中指の作る形と同じ方向になる向きである」ことと定義する。



右手の親指・人差し指・中指の作る形と同じ方向になる向きが右手形。

この図において、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ の 3 つのベクトルはこの順で右手系である。

定理（外積の性質 2）

x 軸、y 軸、z 軸がこの順で右手系ならば、任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はこの順で右手系である。

証明はやや難しいが、ここで説明しておこう。性質として重要であるので、この定理はぜひ知っておいてもらいたいが、証明は必ずしも理解できなくとも大丈夫である。

まず、x 軸,y 軸,z 軸正方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする。x 軸,y 軸,z 軸がこの順に右手系であると仮定しているので、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は右手系である。一方で、$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおいたとき、

$$\begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ca' - c'a \\ ab' - a'b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_3$$

となる。このことから $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ は右手系であって、この場合には定理は満たされることが分かる。それでは任意に与えられた $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して定理が満たされるかどうかを調べよう。

任意に与えられた $\boldsymbol{a}$ に対して、パラメータ t でこれを連続的に動かし、$\boldsymbol{e}_1$ へと動かすことを考えよう。つまり、$\boldsymbol{a}(t)$ という時刻パラメーター t によって決まるベクトルを考え、時刻 0 では $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{e}_1$, 時刻 1 では $\boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{a}$ であるとしよう。ただし、途中の t において、$\boldsymbol{a}(t)$ は零ベクトルにはならないよ

うにとるものとする。同じように、$\boldsymbol{b}(t)$ を考え、$\boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{e}_2$ を時刻パラメータ t で連続的に動かして、$\boldsymbol{b}(1)=\boldsymbol{b}$ へと動かすことを考える。ただし、このとき、$\boldsymbol{b}(t)$ は零ベクトルにはならないし、$\boldsymbol{a}(t)$ と平行にならないように $\boldsymbol{b}(t)$ を上手にとっておくものと仮定する。（空間ベクトルの向きは 2 次元の自由度があるので、そのようにとることは可能である。）

さて、$\boldsymbol{a}(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\\c(t)\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix}a'(t)\\b'(t)\\c'(t)\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}b(t)c'(t)-b'(t)c(t)\\c(t)a'(t)-c'(t)a(t)\\a(t)b'(t)-a'(t)b(t)\end{pmatrix}$ とおこう。$t=0$ のときには、$\boldsymbol{a}(0)=\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$ だから、これはこの順で右手系である。いま、パラメータを 0 から 1 へと増やしていったときに、$\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{x}(t)$ は右手系であり続ける。なぜならば、パラメータ t による動きは連続的なものであるから、右手系であったものが左手系へとジャンプすることはありえないからである。したがって、$t=1$ の場合にも $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{x}(t)$ は右手系であることが示され、定理の正当性が示された。

この最後の部分が厳密でないと思う読者は、ぜひ数学科への進学をお勧めする。厳密には次のように議論する。外積の性質 1 の (1),(2) により、$\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)$ に関して方向と大きさが判明している。つまり、$\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{x}(t)$ は右手系か左手系のいずれかであることはわかっている。$\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \pm\boldsymbol{x}(t)$ が右手系であるとしよう。ただしこの $\pm$ の値は、t によって定まるものとする。$t=0$ の時には符号はプラスである。また、t に関して $\pm$ は連続的に推移する。このことから、符号は t の値にかかわらずいつでもプラスである。（中間子の定理により、連続関数が 1 という値と -1 という値の両方をとりうるならば、その間の値（たとえば 0）もとらなければいけないため。）したがって $t=1$ の場合に $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{x}(t)$ は右手系であることが示される。（証明終わり）

次に外積の基本的な性質を纏めておく。

定理（外積の性質３）

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(2) $t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(t\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(t\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが平行ならば、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$

(4) **空間ベクトル** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でない（＝線形独立である）とき、次の (a),(b),(c) の性質をもつ空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ がただ一つ存在し、それは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と等しい。

- **(a)** $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{x}$
- **(b)** $||\boldsymbol{x}||$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。
- **(c)** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ はこの順で右手系である。

(証明)

(1)(2)(3) は外積の定義より、直接計算により直ちに従う。

(4)(b) により、$\boldsymbol{x}$ は大きさが一通りに定まる。(a)(c) により $\boldsymbol{x}$ は方向が一通りに定まる。これより一意性が示された。一方で $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は上記 (a)(b)(c) をすべて満たすので、これが唯一存在するものと一致する。(証明終わり)

定理 (外積の公式)

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ とする。

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の符号つきの体積である。

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=ab'c''+a'b''c+a''bc'-ab''c'-a'bc''-a''b'c$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$

(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$

(6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

（注意）(5) はヤコビの恒等式、(6) はラグランジュの恒等式と呼ばれている。

（注意）(2) の右辺 $ab'c''+a'b''c+a''bc'-ab''c'-a'bc''-a''b'c$ を $\begin{vmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{vmatrix}$、または $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と書いて、3×3 行列の行列式と呼ぶ。(一般的な行列式の定義については、別の章で説明する。)

(証明)

(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ がこの順で右手系であると仮定する。$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ とする。右手系との仮定から $0\le\theta<\pi/2$ である。$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の張る平行四角形を底面とする平行六面体を考えると、その底面積は $||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||$ である。高さは $\cos\theta||\boldsymbol{c}||$ である。したがって、その体積は

$$\text{体積}=||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\cos\theta||\boldsymbol{c}||=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

となる。ここで、$0\le\theta<\pi/2$ より右辺が正になることに注意してほしい。左手系の場合には、$\pi/2<\theta\le\pi$ となり、同じ理由から負の体積が得られることが分かる。$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が同一平面上にある場合には、$\theta=\pi/2$ となり、体積は 0 である。

（注意）$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が同一平面上にある場合には $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$ であることが示される。

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \left(\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}\right)\\ &= ab'c''+a'b''c+a''bc'-ab''c'-a'bc''-a''b'c\end{aligned}$$

である。

(3) (2) の計算より直ちに示される。

(4)$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\\ &\quad=\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}\\ &\quad=\begin{pmatrix}(ca'-c'a)c''-b''(ab'-a'b)\\(ab'-a'b)a''-c''(bc'-b'c)\\(bc'-b'c)b''-a''(ca'-c'a)\end{pmatrix}\\ &\quad=\begin{pmatrix}-a(a'a''+b'b''+c'c'')+a'(aa''+bb''+cc'')\\-b(a'a''+b'b''+c'c'')+b'(aa''+bb''+cc'')\\-c(a'a''+b'b''+c'c'')+c'(aa''+bb''+cc'')\end{pmatrix}\\ &\quad=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

により与式は示される。

(5) (4) をもちいて、

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\\ &\quad=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\\ &\quad=\boldsymbol{o}\end{aligned}$$

と示される。

(6)

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\\ &\quad=((\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\qquad ((3)\text{ より})\\ &\quad=(-(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{d},\boldsymbol{b})\qquad ((4)\text{ より})\\ &\quad=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

練習問題３

1. 外積の性質１、外積の性質３、外積の公式を、教科書を見ることなく証明してみよ。

定理（外積の性質１）

(1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。（ただし、0 ベクトルのときも「垂直」であると考える。）

(2) $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

定理（外積の性質３）

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(2) $t(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (t\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが平行ならば、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$

(4) **空間ベクトル** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でない（＝線形独立である）とき、次の (a),(b),(c) の性質をもつ空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ がただ一つ存在し、それは $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と等しい。

- **(a)** $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{x}$
- **(b)** $||\boldsymbol{x}||$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。
- **(c)** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ はこの順で右手系である。

定理 (外積の公式)

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ とする。

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の符号つきの体積である。

(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$

(3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(4) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$

(5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$

(6) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

2.　３行３列の行列の行列式

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

に関して、次の公式を証明せよ。

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と任意の実数 p に対して

$$\det(p\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, p\boldsymbol{c}) = p\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'$ に対して

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}) &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}) \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}') &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}')
\end{aligned}$$

。

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= -\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= -\det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}), \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),
\end{aligned}$$

。

(4) $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$

3．3つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して１つの実数を対応させるような関数

$$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}$$

が次の性質を満たすものとする。（性質 1）（性質２）を「線形性」、（性質３）を「交代性」と呼ぶ。

（性質 1） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と任意の実数 p に対して $F(p\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = pF(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$。

（性質 2） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$。

（性質 3） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \quad F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$。

（性質 4） $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$ である。

以下の問いに答えよ。証明や計算をするときには、どの性質を用いて導いたかを書いておくこと。

(1) $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ を示せ。

(2) $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ を示せ。

(3) $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c})$ を示せ。

(4) $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ

(5) $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ

(6) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ はどのような式になると考えられるか。直接計算により求めよ。（計算の詳細をすべて書くのは大変なので, 計算の手順を上手に説明できれば良い。）

(7) (6) と同じ結果を「一意性」という言葉を用いて証明することを試みよ。（簡単に証明できるとは限らない。こまごました計算をしないで済む、という程度の話である。）