# 1-1. 平面 (空間) ベクトル

線形代数とはベクトルと行列に関係する代数を扱ったものである。応用範囲はとても広く，微分積分学をはじめとする解析分野にもさまざまな形で現れる。この章では、高校で学習したベクトルを復習しながら，数の範囲を複素数にも広げて考えることにする。

ベクトルとは向きと大きさを持つ矢印のことであるが，高校で習ったときには平面、または（３次元）空間に含まれる矢印として考えた。このことから始めよう。平面・空間の記号を定義する。実数全体の集合は慣習により

$$\mathbb{R} := \{\text{ 実数 }\}:\ \text{実数全体の集合}$$

と書く。また、座標平面（$xy$-平面)、座標空間 ($xyz$-空間) はそれぞれ

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \ :\ \text{座標平面}$$

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \ :\ \text{座標空間}$$

のように書く。ここで、座標を記述するのに $x$ 座標、$y$ 座標、$z$ 座標を縦に並べて書いたが、別に横に並べてもかまわない。ただし、このテキストでは以後（ほとんどの場合において）ベクトルといえば数を縦に並べたものであるとする。（このあたりは高校と勝手の違うところである。）なお、「数字を縦に並べたもの」という観点から言うと、別に４つ以上の数字を並べても構わないのであって、

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

を（実）$n$ 次元ベクトル空間と呼ぶ。

（注）4 つめ以降の座標成分に対して，時間などの意味づけを行うことは可能であるが、ここではそうしない。線形代数では単に抽象的にいくつかの数が（縦に）並んだものをベクトルというのである。

**ベクトル（a vector）**とは $\mathbf{R}^n$ の 2 点 $P$,$Q$ に対して、$P$ を始点とし、$Q$ を終点とする矢印のことをいう。ただし、平行移動で重ねられるものは同じベクトルであるとすることから、始点を原点 $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ に取った場合のベクトル $\vec{OP}$ のことを点 $P$ の**位置ベクトル（position vector)** と呼び、位置ベクトルと、空間の点とを同じものとみなすのが慣例である。つまり、実数の組 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって、座標上の点を意味すると考えても良いし，位置ベクトルの成分であると考えても良い。この辺りは平面について高校で習ったことの自然な発展である。

このテキストでは、以下、ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ , $\boldsymbol{c}$ のように、小文字の太文字を用いることにする。もちろん従来どおり、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のように矢印を用いても構わないが、矢印は記号が煩雑になりがちなので、このテキストでは用いないことにする。

## 1-2. 複素数、複素ベクトル

複素数は高校で既習であるが、簡単に復習しておく。実数は二乗すると 0 以上の数になるので，方程式

$$x^2 = -1$$

には実数の解はない。そこで、この方程式が解をもつように、$i$ という数を導入し、$i^2 = -1$ であると約束する。このことを最初に思いついたのは１７世紀の数学者デカルトである。現在では $i$ は**虚数単位 (imaginary unit)** と呼ばれ、そして集合

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \text{ は実数 }\}$$

の元を**複素数**と呼ぶ。複素数 $z = x + yi$ に対して、$z$ の**実部 (real part)** を $\mathbf{Re}(z) = x$、**虚部 (imaginary part)** を $\mathbf{Im}(z) = y$、**複素共役 (complex conjugate)** を $\overline{z} = x - yi$ と定義する。

複素数の和・差・積・商は、通常の数や多項式の計算と同じようにすればよい。$z = x + yi$ に対して、

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

は実数であり、この正の平方根を $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と書き、$z$ の**絶対値 (absolute value)** という。

複素数 $z = x + yi$ を平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と対応させることにより、複素数は平面ベクトルであると考えることができる。この意味での平面を**複素数平面 (complex plane)** と呼ぶ。原点は 0 に対応し、0 以外の複素数 $z = x + yi$ は「0 と $z$ の距離＝絶対値 $r = |z|$」と「$x$ 軸正の向きからの角度 $\theta = \mathbf{arg}(z)$（これを $z$ の**偏角 (argument)** と呼ぶ)」によって

$$z = x + yi = r(\sin\theta + \cos\theta i)$$

とあらわすことができる。$(r, \theta) = r(\sin\theta + \cos\theta i)$ は１つの複素数に対応しているので、これを座標の一種であると考え、$(r, \theta)$ を**極座標 (polar coordinate)** と呼ぶ。極座標に関しては積の公式

$$(r, \theta) \cdot (r', \theta') = (rr', \theta + \theta')$$

が成り立つ。

実ベクトルと同じように複素数を縦に並べたもの

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

を複素 $n$ 次元ベクトル空間と呼ぶ。$\mathbb{C}^n$ の元は（$n$ 次元）複素ベクトル (complex vector) と呼ばれる。

## 1-3. ベクトルの和、ベクトルの定数倍、ベクトルの内積

ベクトルの集合 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$ には、「和 (sum)」「定数倍 (scalar product)」が定義される。これは平面ベクトル・空間ベクトルの「和」「定数倍」の定義と同じものと考えられる。実際に、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

である。

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対してベクトルの長さ $\sqrt{x^2 + y^2}$ のことをベクトルの**ノルム (norm)** と呼ぶ。ノルムは（ベクトルの）絶対値とも呼ばれる。より一般に、次のように定める。平面ベクトルのときと同じように、（実数・複素数いずれの場合にも）ノルムとは「空間の中でのベクトルの長さ」であると考えるのが自然である。

**定義**

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、ノルムを $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ で定める。

(2) $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して、ノルムを $||\boldsymbol{z}|| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$ で定める。

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して、内積は $a_1b_1 + a_2b_2$ であった。これと同じように、ベクトルの内積を次のように定めることにする。

**定義**

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、**内積 (inner product)** を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

と定める。

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して、内積を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

と定める。

（注）高校の教科書では、ベクトルの内積は $||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ でも定義されていた。(ただしここで $\theta$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を意味するものとする。) 平面ベクトル・空間ベクトルの場合には、どちらを定義としても構わない（練習問題参照）。$\mathbb{R}^n$ の定義（上記の (1)）の場合においてはどうだろうか？この問題を考え始めると、まず高次元空間内のでの**なす角をどのように定義するか**という幾何学の問題があることに気がつくだろう。

そこで、むしろ逆に考えるというのが現代の幾何学の考え方である。つまり、上記のように内積が定義されているとしたときに、そのなす角 $\theta$ を $||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が成り立つように定める（つまりなす角 $\theta$ を

$$\theta = \arccos\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||}$$

により「定義」する）のである。

（参考）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は（どちらかというと）解析系の記号である。 幾何だと $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と書いたりする。高等学校の教科書では $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と書くのが一般的だ。どの記号を用いても良い。この教科書では $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を用いることにする。

ベクトルの内積とノルムの間には $||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ という関係式が成り立っている。複素数ベクトルの内積について、$b_1, \cdots, b_n$ の複素共役が用いられているのは、この関係式を成り立たせるためであると考えるとわかりやすいだろう。

## 1-4. 諸性質

**シュヴァルツの不等式（Schwarz' inequality）**

$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$

（証明）$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\cos\theta$ であることを正しいと認めれば、$|\cos\theta| \leq 1$ であることから直ちに示される（演習問題参照）。　また、実ベクトルの場合にこの不等式（の二乗）を成分を用いて書き表すと

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

という式になる。これもシュヴァルツの不等式という。（このほかにも、積分に関するシュヴァルツの不等式という公式もある。）

（注意）$\leq$ は≦と同じ記号である。高校までは≦を用いていたと思うが、$\leq$ の方が世界的に広く使われている。これからは $\leq$ を使うことをお勧めする。

**三角不等式**

$||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$

（証明）証明は練習問題を参照のこと。平面ベクトルの場合には三角不等式とは「三角形の 2 辺の和がもう 1 辺の長さより長い」ことを意味している。のでこの不等式が成り立つともいえる。この不等式も空間ベクトルや高次のベクトルについても成立する。

**内積の多重線形性**

$c \in \mathbb{R}$ を実数、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ をベクトルとするとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= (c\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},c\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

**内積の対称性**

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

**ベクトルの囲む三角形の面積**

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の囲む三角形の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$$

で与えられる。

平面ベクトルの場合には、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ であれば $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ と表わされる。

# 練習問題1

1. 0でない複素数 $z$ について、その逆数 $\frac{1}{z}$ もまた複素数であることを示せ。
2. 複素数 $z$ について、その実部と虚部を $z$ と $\overline{z}$ で与える公式を示せ。
3. 極座標表示に関して積の公式 $(r,\theta)\cdot(r',\theta') = (rr', \theta+\theta')$ が成り立つことを示せ。
4. 定数 $a$ に対して、代数方程式 $z^n = a^n$ の解は $z = a(\cos(2k\pi/n) + \sin(2k\pi/n))$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ ですべて与えられていることを示せ。
5. 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とそのなす角 $\theta$ について、
$$||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
を示せ。
6. 実ベクトルに関するシュヴァルツの不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$ を次の手順で示せ。
(1) まず、$t$ を変数とする関数 $f(t) = ||t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2$ を考え、これを $t$ の多項式で表わせ。
(2) 次に、$f(t) \geq 0$ であることを、判別式の条件に書き直せ。
(3) 証明を完結させよ。
7. （やや難）実数列に関するシュヴァルツの不等式 $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$ は実ベクトルに関するシュヴァルツの不等式より示されるが、これは無限数列についても成り立つかどうかを考察せよ。少なくとも両辺の極限が収束していなければいけないが、そのほかに付帯条件が必要だろうか？
8. （やや難）複素ベクトルに関するシュヴァルツの不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$ を次の手順で示せ。
(1) まず、$t$ を複素変数とする関数 $f(t) = ||t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2$ を考え、これを $t$ と $\overline{t}$ の多項式で表わせ。
(2) 次に、$f(t)$ を平方完成せよ。
(3) 証明を完結させよ。
9. 三角不等式 $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}||+||\boldsymbol{b}||$ を証明せよ。（ヒント：$(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2$ を計算せよ。）
10. $c \in \mathbb{R}$ を実数、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ をベクトルとするとき、以下が成り立つことを示せ。
$$c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b})$$
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

11. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ を示せ。

12. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の囲む三角形の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

で与えられることを示せ。

13. 平面ベクトルの場合には、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ であれば、2 つのベクトルの囲む三角形の面積は $S = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ と表わされることを示せ。

14. 平面上の 3 点 $P, Q, R$ に対して、「ベクトル $\vec{PQ}$ からみてベクトル $\vec{QR}$ が**右折しているかどうか**」を判定する方法をベクトルの成分を用いる形で考えよ。