2-1. 線形写像

n, m は２つの自然数であるとする。座標空間から座標空間への写像

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

を考えよう。つまり、任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、ベクトル $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ を対応させる規則のことを写像とよび、そういうものを考えようというのである。この場合、$\mathbb{R}^n$ を定義域と呼び、$\mathbb{R}^m$ を値域と呼ぶ。また、$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ のとき、「f は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ へ移す」ともいう。

(注意) 関数 (function)、変換 (transformation)、写像 (map) は一般には似た意味で使われる。一般的な名称は写像であって、集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ などという使い方をすることもできる。関数というと、座標空間から座標空間への写像を意味することが多い。高等学校で関数と呼んだものは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である。「定義域＝値域」の場合、つまり $n = m$ の場合には「変換」と呼ばれることが多い。

(例) 平面における平行移動は

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

によって与えられるが、これは $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像の例であり、平行移動変換 (parallel transformation) とも呼ばれる。

高校で「１次変換」と呼んでいたものは、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像のうち、１次の項のみで表されるものを意味した。線形代数における１次変換とはこの概念を広げたものである。

定義（１次変換・線形写像 (linear transformation, linear map)）

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が一次変換（または、線形写像）であるとは、定数項を含まない１次式で表されるような写像のことであるとする。

（線形写像の例）

実数 $a, b, c, d,$ に対して、

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

と表される写像は、各成分が１次式であって、かつ定数項を含まないかたちなので、線形写像であることがわかる。

（注意）線形写像は「行列とベクトルの積」であると考えることもできる。たとえば上の例であれば、

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように行列とベクトルの積であると考えることができる。

（参考：アフィン写像）「定数項を含んでも良い１次式で表される写像」のことは「アフィン写像 (affine map) と呼ぶ。これは、線形写像と平行移動の合成写像であると考えられる。

（注意）線形写像 f は必ず $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ を満たす。つまり、原点を原点へと移す。（証明は容易である。）

（注意）式の書き方について。写像 f でベクトル $\boldsymbol{x}$ を移したものは $f(\boldsymbol{x})$ のようにカッコをつけて表現するのが普通である。もし線形写像 f が行列 A と対応しているとすると、行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積は $A\boldsymbol{x}$ とかかれるので、この場合にはカッコはつけないで書くのが普通である。$f(\boldsymbol{x})$ を成分で書くときは $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ のように書き、カッコを二重に書くようなことはしない。

2-2. 回転・線対称の行列表示

座標平面において、原点中心の回転や、原点を通る直線を軸とする線対称移動は線形写像の例である。

命題

原点中心の θ 回転 R_θ は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

直線 $y = (\tan(\theta/2))x$ を軸とする線対称 S_θ は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる。

（証明）

座標平面上の任意の点は、正の実数 r と実数 φ によって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

と書き表せる。（この (r, φ) を極座標と呼ぶ。）ここでの r は原点からの距離であり、φ は x 軸正の向きからの符号つきの角度であり、偏角と呼ばれる。この点から θ 回転すると、原点からの距離は変わらないが、偏角は $\varphi + \theta$ になる。したがって、原点中心の θ 回転 R_θ は

$$R_\theta \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が得られる。

同じ点から直線 $y = (\tan(\theta/2))x$ を軸とする線対称で写すことを考えよう。原点からの距離は変わらないことは図を書いてみればすぐに分かる。偏角がどうなるかは少し考えなければいけないが、移った先の偏角と、φ との平均が $\theta/2$ になることが分かる。つまり、移った先の偏角は $\theta - \varphi$ になる。したがって、直線 $y = (\tan(\theta/2))x$ を軸とする線対称 S_θ は

$$S_\theta \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta-\varphi) \\ r\sin(\theta-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta - r\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が得られる。

特別な場合をいくつかあげておく。原点対称移動は π 回転とみなすことができるので、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

x 軸対称は、y 座標だけ符号が逆転するので、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y 軸対称は、x 座標だけ符号が逆転するので、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

同じように考えて、座標空間において、原点を通る直線を軸とする回転や原点を通る平面に関する面対称移動は線形写像の例である。このことは練習問題に譲る。

2-3. 正射影

$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{o}$ でないベクトルであるとしよう。ベクトル $\boldsymbol{a}$ を含むような（したがって原点も含むような）直線 ℓ に対して、ℓ への正射影を次のように定義することにする。

定義（正射影）

任意の $\mathbb{R}^2$ の点 X から ℓ への垂線をおろして、その垂線の足を Y とする。（X が ℓ 上にある場合には、$Y = X$ であるとする。）$\overrightarrow{OX}$ から $\overrightarrow{OY}$ を対応させる写像を ℓ への正射影（または $\boldsymbol{a}$ に関する正射影）といって、記号 $T_{\boldsymbol{a}}$ を用いる。

$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$、$\boldsymbol{y} = \overrightarrow{OY}$、$\boldsymbol{y} = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$、とおいて、写像 $T_{\boldsymbol{a}}$ を具体的に求めてみよう。

Y は ℓ 上なので、実数 t が存在して、$\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{a}$ と書ける。$\boldsymbol{a} \perp \overrightarrow{XY}$ であるから、

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 0 \\
&(\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) = 0 \\
&t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0
\end{aligned}$$

したがって

$$t = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

であって、

$$\boldsymbol{y} = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

と求まる。

以上の計算を成分で求めてみよう。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 x + aby \\ abx + b^2 y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ともとまり、写像 $T_{\boldsymbol{a}}$ は行列で表示され、つまり線形変換であることが分かった。

（命題）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{o}$ でない平面ベクトルとし、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ とする。このとき、以下が成り立つ。

(1) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$T_{\boldsymbol{a}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$

(2) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$T_{\mathbf{b}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{o}$

(3) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + T_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$。

（証明１）座標成分を用いた証明

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくと、$T_{\boldsymbol{a}}$ は $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ という行列で表わされる。このことから、

$$
\begin{aligned}
T_{\boldsymbol{a}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)^2 \begin{pmatrix} a^4+a^2b^2 & a^3b+ab^3 \\ a^3b+ab^3 & a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

したがって与式は示された。

(2) (1) に引き続き $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおくと、$T_{\boldsymbol{b}}$ は $\dfrac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix}$ という行列で表わされ、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ という条件より、

$$ac + bd = 0$$

である。以上の準備の下に計算する。

$$
\begin{aligned}
T_{\boldsymbol{b}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) &= \frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix} \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\begin{pmatrix} a^2c^2+abcd & a^2cd \\ abc^2+b^2cd & abcd+b^2d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{ac+bd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\begin{pmatrix} ac & bd \\ bc & bd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}
\end{aligned}
$$

したがって与式は示された。

(3) 上の記号をそのまま用いることにすると、

$$
\begin{aligned}
&T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + T_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} + \frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c^2x + cdy \\ cdx + d^2y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\begin{pmatrix} (a^2x+aby)(c^2+d^2) + (c^2x+cdy)(a^2+b^2) \\ (abx+b^2y)(c^2+d^2) + (cdx+d^2y)(a^2+b^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\begin{pmatrix} (a^2c^2+a^2d^2+a^2c^2+b^2c^2)x + (abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd)y \\ (abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd)x + (b^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2d^2)y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\begin{pmatrix} (a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+b^2c^2)x + (ac+bd)(bc+ad)y \\ (ac+bd)(bc+ad)x + (b^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+a^2c^2)y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。(ただし、$ac+bd=0$ と $a^2c^2=b^2d^2$ に注意すること。)したがって、与式は示された。

(証明２)ベクトルの内積を用いた証明

(1) $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ を用いる。

$$
\begin{aligned}
T_{\boldsymbol{a}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) &= T_{\boldsymbol{a}}\left(\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \\
&= \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

よって与式は示された。

(2) 計算のみを示す。$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ という条件より、$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ である。

$$
\begin{aligned}
T_{\boldsymbol{b}}(T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) &= T_{\boldsymbol{b}}\left(\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}T_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{o}
\end{aligned}
$$

よって与式は示された。

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は直交するベクトルなので、線形独立である。したがって、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ と表わされる。このことから、

$$
T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \frac{x(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a}
$$

である。同様に $T_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = y\boldsymbol{b}$ が示される。以上より $T(\boldsymbol{x}) + S(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ が示された。(証明終わり)

3-4. 線形写像の性質

線形写像は次の性質を持つ。

（命題）

f が線形写像ならば、以下が成り立つ。

(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(2) $f(t\boldsymbol{x}) = tf(\boldsymbol{x})$ (t は任意の実数。)

（証明）線形写像 f が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされているとする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

である。同様に、

$$f(t\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tx_1 \\ ty_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = tf(\boldsymbol{x})$$

により与式は示される。

逆に、この二つの式により線形写像は特徴付けられる。次の命題を見てみよう。

（命題）

写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ と任意の実数 t に対して、

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ &f(t\boldsymbol{x}) = tf(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

を満たすならば、f は線形写像である。（つまりある行列 A が存在して、f はこの行列によって表わされる。）

（$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合に関する証明）$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。後は計算である。

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= xf\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ である。（証明終わり）

練習問題 2

1. （容易）一般の n, m に対する線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が「行列とベクトルの積」で表されていることを示せ。

2. （容易）線形写像 f は必ず $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ を満たすことを示せ。

3. （標準）座標平面から座標平面への線形写像であって、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}||$ が成り立つ (この条件を「等長的」という) とき、写像 f は回転であるか線対称であることを示せ。

4. （難）座標平面から座標平面への「写像」であって、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}||$ が成り立つとき、写像 f は回転であるか線対称であることを示せ。

5. （標準）次の写像は線形写像である。対応する行列を求めよ。

   (a) x 軸を回転軸とする θ 回転

   (b) z 軸を回転軸とする θ 回転

   (c) 原点を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交するような平面への正射影

   (d) y 軸線対称

6. （標準）行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を線形写像とみなすとき、その図形的意味を答えよ。

7. （非常に難しい）写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ だけを満たしているとき、この条件だけでは線形写像であることは示せない。反例が存在するのである。その反例を見つけてみよ。

8. （やや難）なお、写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続かつ $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ ならば、f は線形写像であることを示せ。

   以下は平面幾何・立体幾何の問題であるが, ベクトルと関連して出題しておく。

9. 平面直線 $ax + by = c$ とベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とが直交していることを示せ。

10. 平面上の 2 点 $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ を通る直線の式を与えよ。

11. （シムソンの定理）平面上の 3 点 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 平面上の点 $P\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ に対して、P から直線 AB へおろした垂線の足 D（垂線と直線 AB との交点、ただし P が直線 AB 上にあるときは $D=P$ であるとする。）を求めよ。

(2) P から直線 AC へおろした垂線の足 E を求めよ。

(3) P から直線 BC へおろした垂線の足 F を求めよ。

(4) もし D, E, F が同一直線上にあるとすると,P はどのような軌跡を描くか？

(5) 一般の三角形 ABC についても、(4) で観察されるような現象が現れると思うか？

12. （ニュートンの定理）平面上の 4 角形 $OABC$ について、OA と BC は平行ではなく、OC と AB は平行でないとする。以下の問いに答えよ。

(1) A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ であるとする。$\boldsymbol{b} = p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{c}$ とおく。「OA と BC は平行ではなく、OC と AB は平行でない」という条件を p, q の式で表わせ。

(2) OA と BC の交点を D,OC と AB の交点を E とおく。D, E の位置ベクトルを $p, q, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ で表わせ。

(3) OB の中点を L,AC の中点を M, DE の中点を N と置くとき、L, M, N は共線である（＝同一直線上にある）ことを示せ。

13. （オイラー線）三角形 ABC について、ABC の重心 G, 外心 O, 垂心 H は共線であることを示せ。（この定理を、オイラーは座標計算によって証明した。）

14. （ネーゲル点）三角形 ABC の内接円と各辺 BC, CA, AB との交点を順に P, Q, R とする。3 直線 AP, BQ, CR は共点である（1 点で交わる）ことを示せ。

15. 三角形 ABC の 3 つの傍接円と各辺 BC, CA, AB との交点を順に P, Q, R とする。3 直線 AP, BQ, CR は共点であることを示せ。

16. 空間平面 $ax+by+cz=d$ とベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とが直交していることを示せ。

17. 空間上の 3 点 $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$ を通る平面の式を与えよ。

18. 空間内の（$\boldsymbol{o}$ でない）ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に対して、点 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をとおり、ベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する空間平面の式を求めよ。また、その式の図形的意味を考察せよ。

19. 空間直線 $2x + 3y = -x + z - 1 = 4y + z + 1$ と点 $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通る平面の式を求めよ。

20. 空間内の 3 点 $P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, Q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対して、
(1) 三点 P, Q, R を通る平面の式を求めよ。
(2) 三角形 PQR の重心を求めよ。
(3) 三角形 PQR の外心を求めよ。
(4) 三角形 PQR の内心を求めよ。

21. 平面上の三角形 ABC について、二つの頂点の外角の 2 等分線と、残りの頂点の内角の 2 等分線は 1 点で交わる。このような点を三角形 ABC の傍心という。傍心は三角形の 2 辺の延長線と、残りの 1 辺に交わるような円の中心である。これを傍接円という。三角形 ABC について傍心、傍接円は三つずつある。辺 BC と傍接円の一つが交わる点を D、辺 CA と傍接円の一つが交わる点を E、辺 AB と傍接円の一つが交わる点を F、とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ と $\overline{BF} = \overline{CE}$ を示せ。ただし、$\overline{AB}$ は線分 AB の長さを意味するとする。

(2) 3 直線 AD, BE, CF は一点で交わることを示せ。この点を P とする。

(3) A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ とし、$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ とするとき、$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と a, b, c で表せ。

(参考) このようにして求めた点 P、三角形 ABC の重心 G, 三角形 ABC の内心 I は同一直線上にあることを示せ。（重心、内心の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}$ とし、これらを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, a, b, c$ などで書き表してみればよい。