線型代数学問題 (2013年7月30日)

1 次の行列に対して (a) 行列式, (b) (存在する場合には) 逆行列 を求めよ

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & \text{\Large 0} & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \text{\Large 0} \\ n & & & & \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $m \times n$ 実行列 A の定める1次写像を

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

とする

(1) $n = \dim \operatorname{Ker}(f_A) + \operatorname{rank} A$ を示せ

(2) $n \times l$ 実行列 B が $AB = O$ を満たすとき

$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$ を示せ

3 n次実正方行列 A がべき零、すなわちある自然数 $l > 0$ に対して $A^l = O$ であるならば、実は $A^n = O$ であることを証明せよ.

4 1次変換 $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ の基底 $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\}$ に関する行列表示が

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるという. このとき f の通常の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ に関する行列表示を求めよ.

但し $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$番目 である.