微分積分学 A 試験

July 29, 2013

（1）以下の問いに答えよ。

（あ）$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が一様連続であることの定義を述べよ。

（い）$i = 1, 2, 3$ とし、$f_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を以下で定める。

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x \sin x.$$

これらのうち、一様連続であるものをすべて理由を付けて選べ。

（2）$\Sigma_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ は収束することを示せ。

（3）$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を連続な関数とするとき、f は可積分であることを示せ。
ただし f は一様連続であることを用いてよい。

（4）次の（あ）または（い）のどちらかを選択して解答せよ。どちらの問題を選択したか明記せよ。

（あ）$|x| < \frac{1}{2}$ において、次の無限関数項級数：

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

を有理型関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ （f, g はともに多項式）であらわせ。

（い）$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を C^1 級の関数とし、f' を f の微分とする。このとき、

$$\int_0^1 f' = f(1) - f(0)$$

を示せ（ヒント：平均値の定理を使う）