微分積分学 II (担当：浅岡) 試験問題

1. $\mathbf{R}^2$ 上の函数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^4+y^4} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定める.

(a) f が $(0,0)$ で連続かそうでないかを理由つけて答えよ.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ を計算せよ.

(c) f が $(0,0)$ で全微分可能かそうでないかを理由をつけて答えよ.

2. $\mathbf{R}^2$ 上の函数 $g(y,z)$ と $\mathbf{R}^3$ 上の函数 $f(x,y,z)$ を,

$$g(y,z) = y^3 + 3yz^2 - 12y$$
$$f(x,y,z) = (3x - x^3)e^{g(y,z)}$$

で定める. $f(x,y,z)$ の極大点, 極小点を (存在するならば) すべて求めよ.

3. 次の重積分を計算せよ.

(a) $\displaystyle\iint_A (x-y)(3y-x)\,dxdy,$

$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le 3y,\ x+y \le 8,\ 0 \le x-y \le 2\}.$

(b) $\displaystyle\iiint_B \frac{z}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdydz,$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x\}.$

4. 正の整数 m に対して, $\mathbf{R}$ 上の函数 f_m を

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(2^n x)}{3^n}$$

で定める.

(a) 函数列 $(f_m)_{m\ge1}$ は $\mathbf{R}$ 上のある函数 f に一様収束することを示せ.

(b) f は C^1 級函数であることを示せ.

(c) f は C^2 級函数ではないことを示せ.

週明けまでに, 略解を浅岡の web page

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~asaoka/lectures/

に置いておきます.

微分積分学 II 試験 略解

(注) あくまで略解なので，細部は自分で埋めること．

1. (a)

$$|f(x,y)| \leq |x| \cdot \frac{x^4}{x^4+y^4} + |y| \cdot y^4 x^4 + y^4 \leq |x| + |y| \leq 2\|(x,y)\|$$

より，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\|(x,y)\| < \epsilon/2$ ならば $|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$. よって，$f$ は $(0,0)$ で連続.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1.$$

(c) (b) と同様の計算で，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ がわかる．仮に f が $(0,0)$ で全微分可能であるとすると，f の $(0,0)$ での全微分 $df_{(0,0)}$ は,

$$df_{(0,0)}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot s + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot t = s + t$$

をみたす．$f(0,0) = 0$ なので，全微分の定義から，すべての $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$\lim_{(s,t) \to (0,0)} \frac{|f(s,t) - (s+t)|}{\|(s,t)\|} = 0.$$

しかし，すべての $\alpha \neq 0$ に対して，$(s,t) = (\alpha, 2\alpha)$ とすると，

$$\frac{|f(s,t) - (s+t)|}{\|(s,t)\|} = \frac{\frac{1+2^5}{1+2^4} - 3}{\sqrt{5}} \neq 0$$

となるので，f は $(0,0)$ で全微分可能でない.

2. $f(x,y,z)$ の臨界点は $x = \pm 1$, $(y,z) = (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$. (x,y,z) での f の Hesse 行列は,

$$e^{g(y,z)} \cdot \begin{pmatrix} -6x & (3-3x^2)g_y & (3-3x^2)g_z \\ (3-3x^2)g_y & (3x-x^3)(6y+(g_y)^2) & (3x-x^3)(6z+g_y g_z) \\ (3-3x^2)g_z & (3x-x^3)(6z+g_y g_z) & (3x-x^3)(6y+(g_z)^2) \end{pmatrix}$$

(ただし，$g_y = \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$ $g_z = \frac{\partial g}{\partial z}(y,z)$ とする) なので，(x,y,z) が臨界点のとき，f の Hesse 行列は,

$$e^{g(y,z)} \cdot \begin{pmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & (3x-x^3) \cdot 6y & (3x-x^3) \cdot 6z \\ 0 & (3x-x^3) \cdot 6z & (3x-x^3) \cdot 6y \end{pmatrix}$$

となる．固有値がすべて正となる場合，負となる場合を考えることで，極小点は $(-1,-2,0)$，極大点は $(1,-2,0)$ であることがわかる．

3. (a) A は，$(0,0)$, $(4,4)$, $(5,3)$ $(3,1)$ を頂点する四角形の (境界も含めた) 内部．φ を $(1,0)$, $(0,1)$ をそれぞれ $(3,1)$, $(2,2)$ に写す線型写像，すなわち，

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

で定めると，φ は

$$A' = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2-s\}$$

を A に写す微分同相写像で，$\det D\varphi = 4$ をみたすので，

$$\begin{aligned}\iint_A (x-y)(3y-x)\,dxdy &= \iint_{A'} (2s)(4t) \cdot 4\,dsdt \\ &= 32 \int_0^1 \left(\int_0^{2-s} st\,dt \right) ds \\ &= \frac{44}{3}.\end{aligned}$$

(b) 円柱座標 $\Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ を取り，

$$B' = \{(r,\theta,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq r\cos\theta\}$$

と置くと，

$$\begin{aligned}\iiint_B \frac{z}{1+(x^2+y^2)^2} dxdydz &= \iiint_{B'} \frac{zr}{1+r^4} drd\theta dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{r\cos\theta} \frac{zr}{1+r^4} dz \right) d\theta \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^4} dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi \log 2}{16}.\end{aligned}$$

4. (a) すべての $x \in \mathbf{R}$ について，$\left|\frac{\sin(2^n x)}{3^n}\right| \leq 3^{-n}$ であり，級数 $\sum_{n\geq 1} 3^{-n}$ は収束するので，f_m はある f に一様収束する．

(b) $\left(\frac{\sin(2^n x)}{3^n}\right)' = \frac{2^n}{3^n}\cos(2^n x)$ で，級数 $\sum_{n\geq 1} (2/3)^n$ が収束することから，(a) と同様にして，$\sum f_m'(x)$ はある函数 g に一様収束．f_m 自身も一様収束しているので，講義中に示した定理から f は C^1 級で，$f' = g$.

(c) $f'(x) = \sum_{n\geq 1}(2/3)^n \cos(2^n x)$ より，$x_k = 2^{-k}\pi$ と置くと，

$$f'(x_k) - f'(0) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos(2^{n-k}\pi) - 1) = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos(2^{n-k}\pi) - 1).$$

$\cos x \leq 1$ より，和のすべての項は 0 以下なので，$n = k$ の項のみを残すと，

$$f'(x_k) - f'(0) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot (-2).$$

よって，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f'(x_k) - f'(0)}{x_k} \leq \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^k = -\infty.$$

従って，f' は $x = 0$ で微分可能ではない.

(注) 同じような計算をすると，f' はすべての $x \in \mathbf{R}$ で微分可能ではないことがわかる.