

量子力学演習 前半の試験問題

《注意事項》解答は、【問題 1】を青色、【問題 2】を緑色、【問題 3】を茶色の解答用紙に記入すること。
また、問題文中で定義されていない文字を使用する場合は、定義して使用すること。

【問題 1】(青色の解答用紙に解答すること)

幅 L の無限に深い 1 次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (x < 0, x > L) \end{cases}$$

に閉じ込められた質量 m の自由粒子を考える。

- (1) この粒子の規格化された波動関数 $\varphi(x)$ とエネルギー固有値 E を求め、整数 n を用いて表せ。
- (2) 基底状態および最低励起状態 (第 1 励起状態) の確率密度を図示せよ。
- (3) 粒子の運動量の期待値 $\langle p \rangle$ を求めよ。
- (4) p^2 の期待値 $\langle p^2 \rangle$ の計算から、粒子のド・ブロイ波長を求めよ。
- (5) $L = 10 \text{ \AA}$ の場合の基底状態のエネルギー [eV] を求めよ。但し、 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (光速) として、 $m_e = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}/c^2$, $\hbar c = 1973 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$ ($\hbar c = 1.24 \times 10^4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$) を用いよ。

【問題 2】(緑色の解答用紙に解答すること)

質量 m 、エネルギー E の粒子の一次元の運動を量子論に基づいて考える。ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a & (\text{領域 I}) \\ 0 & -a \leq x \leq a & (\text{領域 II}) \\ V_0 & x > a & (\text{領域 III}) \end{cases}$$

であり、 $0 < E < V_0$ の場合について、以下の問に答えよ。

- (1) $-\infty < x < \infty$ における波動関数 $\varphi(x)$ は、 x の偶関数か奇関数かのいずれかになることを、波動関数を具体的に求めないで示せ。以下に示す様に、当該条件下では、エネルギー固有値は離散的で、縮退していないこと ((1) の解答では証明不要) を用いてよい。
- (2) 領域 I, II, III においてシュレーディンガー方程式を満たす有界な一般解 $\varphi_I(x)$ 、 $\varphi_{II}(x)$ 、 $\varphi_{III}(x)$ を記せ。また、波動関数に関する境界条件を、 $\varphi_I(x)$ 、 $\varphi_{II}(x)$ 、 $\varphi_{III}(x)$ を用いて表せ。
- (3) シュレーディンガー方程式及び境界条件を満たす関数 $\varphi_I(x)$ 、 $\varphi_{II}(x)$ 、 $\varphi_{III}(x)$ を求めよ (規格化しなくてよい)。また、これらの関数で表される、 $-\infty < x < \infty$ における波動関数 $\varphi(x)$ は、(1) で解答したように、偶関数、または、奇関数であることを示せ。