【解答用紙B】（５０％）

問２　水素原子にエネルギー $\hbar\omega$ を持つ光（電磁波）が照射された場合の水素原子中の電子の遷移について答えよ。

(1) 水素原子中の電子の波動関数は、$\varphi_{n,\ell,m_\ell}(r,\theta,\phi)=R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi)$ で与えられる。

① 量子数 (n,ℓ,m_ℓ) のそれぞれの名前と取り得る値を答えよ。

(2) 光（電磁波）が照射された場合、光と水素原子の相互作用（電子に働く摂動ポテンシャル）$H'(t)$ は、$H'(t)=-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_0\cos\omega t=H'(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$，ただし $H'=-\dfrac{1}{2}e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_0$ で与えられる。摂動 $H'(t)$ が $t=0$ から加わった時の波動関数を $\Psi(\boldsymbol{r},t)=\sum_n c_n(t)\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-i\dfrac{E_n^{(0)}}{\hbar}t)$ とする。ここで $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ と $E_n^{(0)}$ は摂動が無い場合の固有関数と固有値で、$c_n(t)$ は時間に依存する展開係数である。その結果、$\dfrac{dc_f(t)}{dt}=-\dfrac{i}{\hbar}\sum_n c_n(t)H'_{fn}(t)e^{i\omega_{fn}t}$ を得る。ここで、$\hbar\omega_{fn}=E_f^{(0)}-E_n^{(0)}$、$H'_{fn}(t)=\int\varphi_f^*(\boldsymbol{r})H'(t)\varphi_n(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$ である。これを解くために、$H'(t)$ を $\lambda H'(t)$ とおき、さらに、$c_n(t)=c_n^{(0)}+\lambda c_n^{(1)}(t)+\lambda^2c_n^{(2)}(t)+\ldots.$ と展開する。

① 系が $t=0$ で i 状態（始状態）にあったとして、$c_i^{(0)}=1$，$c_n^{(0)}=0\ (n\neq i)$ で、$f\neq i$ の場合の $c_f^{(1)}(t)$ を与える式を積分の形で求めよ。

(3) $\langle n',\ell',m_{\ell'}|H'|n,\ell,m_\ell\rangle$ を計算して、$H'(t)$ に対する遷移の選択則を考える。

① $\boldsymbol{f}(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$ と、$R_{n,\ell}(r)$ や $Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi)$ や r,θ,ϕ などを用いて、$\langle n',\ell',m_{\ell'}|H'|n,\ell,m_\ell\rangle$ を極座標表示で積分の形に書き直せ。

② $Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi)=(-1)^{(m_\ell+|m_\ell|)/2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{2\ell+1(\ell+|m_\ell|)!}{2(\ell-|m_\ell|)!}}P_\ell^{|m_\ell|}(\cos\theta)e^{im_\ell\phi}$ となる。この式と①の結果より、m_ℓ に関する遷移の選択則を電場 $\boldsymbol{E}_0$ が z 方向の場合と、(x,y) 方向の場合について求めよ。

③ 次に、ℓ に関する遷移の選択則を、もっとも簡単な電場 $\boldsymbol{E}_0$ が z 方向の場合について考える。最初に、この場合の θ に関する積分式を求めよ。次に、$\varsigma=\cos\theta$ の変数変換を行った積分式を求めよ。ここで、ルジャンドル陪関数の漸化式 $\varsigma P_\ell^{|m_\ell|}(\varsigma)=\dfrac{\ell+|m_\ell|}{2\ell+1}P_{\ell-1}^{|m_\ell|}(\varsigma)+\dfrac{\ell-|m_\ell|+1}{2\ell+1}P_{\ell+1}^{|m_\ell|}(\varsigma)$ を用いて書き直せ。最後に、$\int_{-1}^{1}P_\ell^{|m_\ell|}(z)P_{\ell'}^{|m_\ell|}(z)dz=\dfrac{2}{2\ell+1}\dfrac{(\ell+|m_\ell|)!}{(\ell-|m_\ell|)!}\delta_{\ell\ell'}$ の直交関係を用いて ℓ に関する遷移の選択則を求めよ。

(4) $t=0$ まで基底状態にいた水素原子に対して、光（電磁波）が照射され、z 方向に一様な電場 $E(t)=E_0e^{-i\omega t-\gamma t}$ が掛かったとき、以下の問に答えよ。

① 水素原子の基底状態は一般的に何と呼ぶか答えよ。また、その時の量子数の値を答えよ。

② 遷移の選択則が許す最低エネルギーの励起状態は一般的に何と呼ぶか答えよ。また、その時の量子数の値を答えよ。

③ $t\to\infty$ で基底状態から励起された電子が最低エネルギーの励起状態に見いだされる確率を求めよ。計算を簡単にするため、遷移行列要素を M とせよ。