

平成 23 年度量子力学(A)試験問題 (担当: 森田教授、片山教授、阿部准教授)

以下の問に答えよ。解答用紙に、学籍番号と所属する学科目名を必ず記すこと。

問 1 と問 2 をそれぞれ解答用紙 A と B の各 1 部に解答すること。

【解答用紙 A】(50%)

問 1 1 次元調和振動子 $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ の波動関数とエネルギー固有値は、次式で与えられる。

$$\varphi_n^{(0)}(x) = A_n H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

ただし、 $H_n(\xi)$ はエルミートの多項式、 $\xi = \alpha \cdot x$, $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ である。

ここで、 $\varphi_n^{(0)}(x)$ は規格直交性を満たす。

さらに、2 つの演算子 $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)$ および $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right)$ を用いると、次式が成り立つ。

$$a^* \varphi_j^{(0)}(x) = \sqrt{j+1} \varphi_{j+1}^{(0)}(x), \quad a \varphi_j^{(0)}(x) = \sqrt{j} \varphi_{j-1}^{(0)}(x)$$

(1) この系に $H' = \lambda x$ の摂動が加わった場合のエネルギー固有値 E_n を以下の手順で求める。

① $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^* + a)$ の関係から、積分 $\langle i | \xi | j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^{(0)*}(x) \xi \varphi_j^{(0)}(x) dx$ について、次式が成り立つことを示せ。

$$\langle i | \xi | j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{j+1} \langle i | j+1 \rangle + \sqrt{j} \langle i | j-1 \rangle \right)$$

ここで、ブラ・ケットの $i, j+1, j-1$ はそれぞれ $\varphi_i^{(0)}(x)$, $\varphi_{j+1}^{(0)}(x)$, $\varphi_{j-1}^{(0)}(x)$ を表す。

② 上の関係式を用いて、エネルギー固有値 E_n を第 2 次摂動近似の範囲で求め、 $\lambda, m, \omega, n, \hbar$ を用いて表わせ。
ここで、第 2 次摂動近似でのエネルギー固有値は次式で与えられることを用いよ。

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} = E_n^{(0)} + \langle n | H' | n \rangle + \sum_{i \neq n} \frac{|\langle i | H' | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_i^{(0)}}$$

(2) この系に $H' = \lambda x^2$ の摂動が加わった場合のエネルギー固有値 E_n を以下の手順で求める。

③ $\xi^2 | j \rangle = \frac{1}{2} (a^* + a)^2 | j \rangle = \frac{1}{2} (a^* \cdot a^* + a^* \cdot a + a \cdot a^* + a \cdot a) | j \rangle$ の関係式の各項を演算することにより、積分 $\langle i | \xi^2 | j \rangle$ は次式を満たすことを示せ。

$$\langle i | \xi^2 | j \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(j+1)(j+2)} \langle i | j+2 \rangle + (2j+1) \langle i | j \rangle + \sqrt{j(j-1)} \langle i | j-2 \rangle \right\}$$

④ 上の関係式を用いて、1 次の摂動エネルギー $E_n^{(1)}$ を求めよ。

⑤ 2 次の摂動エネルギー $E_n^{(2)}$ を求め、第 2 次摂動近似の範囲でエネルギー固有値 E_n を $\lambda, m, \omega, n, \hbar$ を用いて表わせ。

⑥ シュレーディンガー方程式 $(H_0 + H') \varphi_n = E_n \varphi_n$ から、エネルギー固有値 E_n の厳密解を求めよ。

次に、 $\lambda \ll \frac{1}{2} m \omega^2$ として、厳密解 E_n を 2 次の項までマクローリン展開した近似式を求め、それが⑤の結果

と一致することを示せ。必要ならば、 $(1+\gamma)^k \cong 1 + k\gamma + \frac{1}{2} k(k-1)\gamma^2$ の関係を用いよ。

(3) ⑦ この系に $H' = \lambda x^4$ の摂動が加わった場合の 1 次の摂動エネルギー $E_n^{(1)}$ を求めよ。演算子 $\xi^4 = \frac{1}{4} (a^* + a)^4$ の

各項のうち、 $E_n^{(1)}$ に寄与するのは、等しい個数の a^* と a を含むものだけであり、それは、

$\frac{1}{4} (a^* \cdot a^* \cdot a \cdot a + a^* \cdot a \cdot a^* \cdot a + a^* \cdot a \cdot a \cdot a^* + a \cdot a^* \cdot a^* \cdot a + a \cdot a^* \cdot a \cdot a^* + a \cdot a \cdot a^* \cdot a^*)$ であることを用いよ。