

数学解析 II (平成 23 年度) 試験問題

注意: 解答用紙, 計算用紙 (ともにコース, 学籍番号, 氏名を記入すること) を提出すること. 試験問題は持ち帰ってよい.

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(a) $e^t \cos 3t$

(b) $\int_0^t \sin 2\tau \, d\tau$

(c) $2(t-2)H(t-2)$

なお, $H(t)$ は, ヘヴィサイドの単位 (階段) 関数である.

2. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ.

(a) $\frac{1}{(s+2)(s+3)}$

(b) $\frac{s^2 + s + 1}{s^3}$

(c) $\frac{s+1}{s^2 + 4s + 5}$

3. 微分方程式

$$(y^2 + 3xy)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (1)$$

について考える.

(a) 式 (1) は完全微分方程式か. 判定せよ.

(b) 微分方程式 (1) を解け. なお, 任意定数は c とおくこと.

4. 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t) \quad (2)$$

について考える.

(a) $a(t) = -\frac{t}{1+t^2}$, $f(t) = 0$ とおき, 微分方程式 (2) の一般解を求めよ.

(b) $a(t) = -\frac{t}{1+t^2}$, $f(t) = t$ とおき, 微分方程式 (2) の一般解を求めよ.

(c) $a(t) = 2$, $f(t) = \delta(t-1)$, $x(0) = 0$ とおき, 初期値問題を解け.

なお, 一般解を表現する際には, 任意定数を c と書くこと. また, $\delta(t)$ は, ディラックの δ -関数である.

5. 関数

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \frac{dx_1}{dt}(t) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t) = \frac{1}{t}, \quad x_2(t) = \sqrt{t}$$

について考える. ただし, $t > 0$ とする.

(a) $W(t)$ を求めよ.

(b) $W(t) = 0$ となる t は存在するか. 判定せよ.

(c) 微分方程式 (初期値問題)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2t^2}x = 0, \quad x(1) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(1) = 2$$

の解 $x(t)$ を求めよ.

6. 微分方程式

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{d^2x}{dt^2} + 13\frac{dx}{dt} = f(t) \quad (3)$$

について考える.

(a) $f(t) = 0$ とおき, 微分方程式 (3) の一般解を求めよ. なお, 任意定数は c_1, c_2, c_3 とおくこと.

(b) $f(t) = e^{3t}$ とおき, 微分方程式 (3) の特殊解を求めよ.

(c) $f(t) = 7 + 13t$ とおき, 微分方程式 (3) の特殊解を求めよ.

7. 微分方程式 (初期値問題)

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

について考える. ただし, $\dot{x} = dx/dt$ である.

(a) e^{At} を求めよ.

(b) 初期値問題 (4) の解 $x(t)$ を求めよ.

以上