

数学解析 II (平成 22 年度) 試験問題

注意: 解答用紙, 計算用紙 (ともにコース, 学籍番号, 氏名を記入すること) を提出すること. 試験問題は持ち帰ってよい.

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(a) $e^t \cos 2t$

(b) $\int_0^t e^\tau d\tau$

(c) $e^{-t}H(t-2)$

なお, $H(t)$ は, ヘヴィサイドの単位 (階段) 関数である.

2. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ.

(a) $\frac{1}{s(s+2)}$

(b) $\frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

(c) $\frac{1}{(s-3)^2}$

3. 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t) \quad (1)$$

について考える.

(a) $a(t) = 2t$, $f(t) = 0$ とおき, 微分方程式 (1) の一般解を求めよ.

(b) $a(t) = 2t$, $f(t) = t$ とおき, 微分方程式 (1) の一般解を求めよ.

(c) $a(t) = 1$, $f(t) = \delta(t-1)$, $x(0) = 0$ とおき, 初期値問題を解け.

なお, 一般解を表現する際には, 任意定数を c と書くこと. また, $\delta(t)$ は, ディラックの δ -関数である.

4. 最初に, 微分方程式

$$(x-y)dx + (y^{-2} - x)dy = 0 \quad (2)$$

について考える.

(a) 式 (2) は完全微分方程式か. 判定せよ.

(b) 微分方程式 (2) を解け.

(裏面に続く)

次に、微分方程式

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0 \quad (3)$$

について考える.

(c) 式 (3) は完全微分方程式か. 判定せよ.

(d) 微分方程式 (3) を解け.

なお、一般解を表現する際には、任意定数を c と書くこと.

5. 関数

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \frac{dx_1}{dt}(t) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t) = e^{-t}, \quad x_2(t) = te^{-t}$$

について考える.

(a) $W(t)$ を求めよ.

(b) $W(t) = 0$ となる t は存在するか. 判定せよ.

(c) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

の基本解系となるように、実数 a, b を決めよ.

6. 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = f(t) \quad (4)$$

について考える.

(a) $f(t) = 0$ とおき、微分方程式 (4) の一般解を求めよ. なお、任意定数は c_1, c_2 とおくこと.

(b) $f(t) = \sin 2t$ とおき、微分方程式 (4) の特殊解を求めよ.

(c) $f(t) = e^{3t}$ とおき、微分方程式 (4) の特殊解を求めよ.

7. 微分方程式 (初期値問題)

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

について考える. ただし、 $\dot{x} = dx/dt$ である.

(a) e^{At} を求めよ.

25)

(b) 初期値問題 (5) の解 $x(t)$ を求めよ.