2011 年 7 月 26 日（担当：情報科学研究科 情報数理学専攻 藤崎泰正）

数学解析 I（平成 23 年度）　試験問題

注意：解答用紙，計算用紙 (ともに所属，学籍番号，氏名を記入すること) を提出すること．試験問題は持ち帰ってよい．

1. 次の値を $x+iy$ の形で書け．

   (a) $(1-i)^3$

   (b) $-i$ の平方根

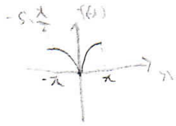
   (c) $\log(1-i)$

2. 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

   と書くとき，次の関数のフーリエ係数 a_0、a_k、b_k、$k=1,2,\ldots$ を求めよ．

   (a) $f(x) = \left|\sin \dfrac{x}{2}\right|$



   (b) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$　　$f(x+2\pi) = f(x)$

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ．

   (a) $f(x) = \begin{cases} e^{-3x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x < 0,\ 2 \leq x) \end{cases}$

   なお，フーリエ変換を表現する際，e^{-iu} などの指数関数を用いてよい (三角関数にする必要はない)．

4. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とするとき，次の関数のフーリエ変換を $F(\cdot)$ を用いて表現せよ．

   (a) $f(-x)$

   (b) $\overline{f(x)}$

(裏面に続く)

5. 次の関数 $f(z)$ は正則か，調べよ．また，正則ならば，導関数 $f'(z)$ を求めよ．

(a) $f(z) = z\overline{z}$

(b) $f(z) = \overline{z}^2$

6. 次の複素積分を計算せよ．

(a) $\displaystyle\int_C z^4\,dz \qquad C\colon\ z = z(\theta) = e^{i\theta},\ \ \theta\colon\ 0 \to \pi$

(b) $\displaystyle\int_C \frac{iz}{iz-2}\,dz \qquad C\colon\ z = z(\theta) = e^{i\theta},\ \ \theta\colon\ 0 \to 2\pi$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{z^3}{3z+i}\,dz \qquad C\colon\ z = z(\theta) = e^{i\theta},\ \ \theta\colon\ 0 \to 2\pi$

7. 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ を，以下の領域において，$z = 0$ を中心としてローラン展開せよ．

(a) $0 < |z| < 1$

(b) $|z| > 1$

$\frac{z^n}{n!}$

8. 次の関数の孤立特異点を求め，分類し，留数を求めよ．

(a) $\dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ $\quad e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 \quad \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}, 1\right) = \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2} e^z = e$

(b) $z^3 \sin\dfrac{1}{z}$ $\quad \sin\frac{1}{z} =$

$\sin x = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)} \quad \sin z = z - \frac{1}{3!}z^3$

9. 次の実積分を計算せよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\cos\theta}\,d\theta$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

10. 関数 $f(z)$ は領域 $D_R = \{z \mid |z-a| \le R\}$ の近傍で正則とする．このとき，$z \in D_R$ において $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad\qquad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

と表現できる．いま，$C_R = \{z \mid |z-a| = R\}$ と定義するとき，任意の $z \in C_R$ に対して $|f(z)| \le M_R$ であれば，係数 b_n について

$$|b_n| \le \frac{M_R}{R^n}$$

が成り立つことを示せ．

以上