電磁理論 IA & IB (A クラス) ミニッツレポート B①	2009 年 5 月 2 9 日	学籍番号		氏名		評点	

（束(Flux)と循環(Circulation)）

（1）円柱座標系(r, φ, z)においてベクトル界$\boldsymbol{A}(=\boldsymbol{i}_r A_r(r))$がある．ここで$\boldsymbol{i}_r$は円柱座標系$(r, \varphi, z)$の$r$方向の基本ベクトル，$A_r(r)$は$\boldsymbol{A}$の$r$方向成分で$r$のみの関数とする． z軸方向は単位長さとする．

（1－1）z軸を中心とし半径rの円柱側面を貫いて外方へ出て行く力線の束(Flux)，即ち総線束；

$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n} dS$ を求めよ．ここで$\boldsymbol{n}$は外向き法線単位ベクトルである．

$\boldsymbol{n}dS = dS_r = d\ell_\varphi \times d\ell_z = \mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi \times \mathring{i}_z h_z dz = \mathring{i}_\varphi \times \mathring{i}_z \, r d\varphi dz = \mathring{i}_r r d\varphi dz$ （∵円柱座標 $h_r=1, h_\varphi=r, h_z=1$）

$\therefore \boldsymbol{A}\bullet \boldsymbol{n}dS = \mathring{i}_r A_r(r) \bullet \mathring{i}_r r d\varphi dz = \mathring{i}_r \cdot \mathring{i}_r A_r(r) r d\varphi dz = A_r(r) r d\varphi dz$

$\therefore \Phi = \oint_S \boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 A_r(r) r d\varphi dz = A_r(r) r [\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = 2\pi r A_r(r)$

（1－2）ガウスの発散定理を用いた結果が上記の結果と一致することを示せ.(但し r=0 で $\boldsymbol{A}$は有界)

$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r(r))\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r(r))$

$dV = d\ell_r\cdot(d\ell_\varphi \times d\ell_z) = \mathring{i}_r h_r dr\cdot(\mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi \times \mathring{i}_z h_z dz) = \mathring{i}_r\cdot(\mathring{i}_\varphi\times\mathring{i}_z) r dr d\varphi dz = r dr d\varphi dz$

$\therefore \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A} dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r(r)) \cdot r dr d\varphi dz = [rA_r(r)]_0^r [\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = 2\pi r A_r(r)$

∴ 一致

（1－3）$r=a$の円柱内を一定の電荷密度ρで満たされているとき，電荷量$Q(r) = \int_V \rho dV$ を求めよ．

$dV = r dr d\varphi dz$

但し，z 方向は単位長さする．（ヒント：場合分けが必要）

$r<a$のとき $Q(r) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho r dr d\varphi dz = \rho\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = \pi r^2 \rho$

$r \geq a$のとき $Q(r) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r dr d\varphi dz = \rho\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = \pi a^2 \rho$

（2）円柱座標系(r,φ,z)においてベクトル界$\boldsymbol{B}(=\boldsymbol{i}_\varphi B_\varphi(r))$がある．ここで$\boldsymbol{i}_\varphi$は円柱座標系の$\varphi$方向基本ベクトル，$d\boldsymbol{\ell}$は半径$r$の周回$C$上の微分線素ベクトル，$B_\varphi(r)$は$\boldsymbol{B}$の$\varphi$方向成分で$r$のみの関数とする．

（2－1）半径rの周回Cでの循環；$F = \oint_C \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{\ell}$ を求めよ．

$d\ell = d\ell_r + d\ell_\varphi + d\ell_z = \mathring{i}_r d\ell_r + \mathring{i}_\varphi d\ell_\varphi + \mathring{i}_z d\ell_z = \mathring{i}_r h_r dr + \mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi + \mathring{i}_z h_z dz$

$\boldsymbol{B}\cdot d\ell = \mathring{i}_\varphi B_\varphi(r)\cdot d\ell_\varphi = \mathring{i}_\varphi B_\varphi(r)\cdot\mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi = \mathring{i}_\varphi\cdot\mathring{i}_\varphi B_\varphi(r) r d\varphi = B_\varphi(r) r d\varphi$

$\therefore F = \int_0^{2\pi} B_\varphi(r) r d\varphi = B_\varphi(r) r [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r B_\varphi(r)$

（2－2）ストークスの定理を用いた結果が上記の結果と一致することを示せ.(但し r=0 で $\boldsymbol{B}$は有界)

$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathring{i}_1 & h_2\mathring{i}_2 & h_3\mathring{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1B_1 & h_2B_2 & h_3B_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathring{i}_r & r\mathring{i}_\varphi & \mathring{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rB_\varphi(r) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left\{\mathring{i}_z\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r)) - \mathring{i}_r\frac{\partial}{\partial z}(rB_\varphi(r))\right\}$

$\boldsymbol{n}dS = dS_z = d\ell_r\times d\ell_\varphi = \mathring{i}_r h_r dr \times \mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi = \mathring{i}_r\times\mathring{i}_\varphi r dr d\varphi = \mathring{i}_z r dr d\varphi$

$\therefore (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{r}\left\{\mathring{i}_z\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r)) - \mathring{i}_r\frac{\partial}{\partial z}(rB_\varphi(r))\right\}\cdot\mathring{i}_z r dr d\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r)) dr d\varphi$

$\therefore \int_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) dr d\varphi = [rB_\varphi(r)]_0^r[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r B_\varphi(r)$ ∴ 一致

（2－3）z 軸を中心にする半径aの円筒状(厚さゼロ)に均一な電流密度$\boldsymbol{J}(=\boldsymbol{i}_\varphi J)$で電流が流れているとき，電流量$I(r) = \int_S \boldsymbol{J}\bullet\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．（ヒント：場合分けが必要）

$\boldsymbol{n}dS = dS_r = \mathring{i}_z r dr d\varphi$

$r<a$のとき（$J=0$ より）$I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^r \mathring{i}_z J\cdot\mathring{i}_z r dr d\varphi = J\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi} = \underset{0}{J}\cdot\frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi = 0$

$r \geq a$のとき（$r=a$のときJ存在より）$I(r) = \int_0^{2\pi}\mathring{i}_z J\cdot\mathring{i}_z a d\varphi = Ja[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi a J$