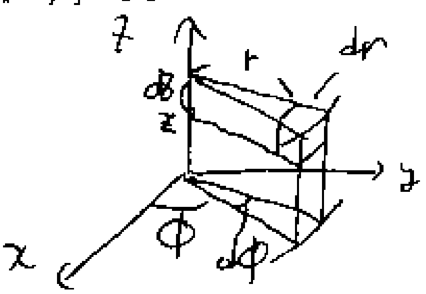
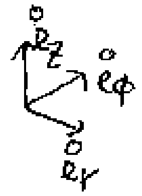
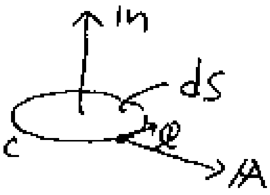
電磁理論 IA & IB (A クラス) ミニッツレポート⑤	2009 年 6 月 10 日	学籍番号		氏名		評点	

回転の定義: $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\bullet\boldsymbol{n} \equiv \lim_{\Delta S\to 0}\dfrac{\oint_C \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$ から円柱座標系における rot$\boldsymbol{A}$ の表示式を以下の手順で求めよ。

なお、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_x A_x + \boldsymbol{i}_y A_y + \boldsymbol{i}_z A_z$ とし、$\boldsymbol{n}$ は積分経路 C がある面 S の法線ベクトルとする。







微分線素(dl_r, dl_ϕ, dl_z):

$dl_r = \boxed{dr}$ $dl_\phi = \boxed{r\,d\phi}$ $dl_z = \boxed{dz}$

微分面素(dS_r, dS_ϕ, dS_z)(但し、微分線素表記は使わないこと):

$dS_r = \boxed{r\,d\phi\,dz}$ $dS_\phi = \boxed{dr\,dz}$ $dS_z = \boxed{r\,dr\,d\phi}$

まず、$\boldsymbol{n}$ として r 軸を考え、r 軸をもって左に回す強さ、つまり右下図の A→B→C→D の線積分を求める。

A→B の線積分は、微分線素 dl_ϕ を用いると、$A_\phi dl_\phi$、となる。

C→D の線積分、つまり $z+dz$ における線積分値は、積分方向が逆になることを考慮すると、

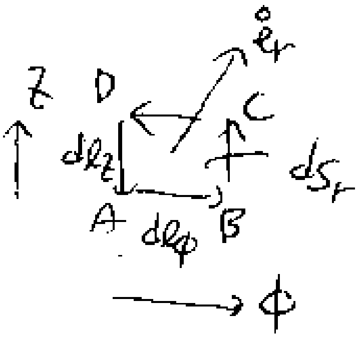
$-(A_\phi dl_\phi + (dz$ による増分))、となる。ここで増分は、

増分 $\neq$ (A_ϕ の z に対する偏微分)・dz・dl_ϕ

とはならず、dl_ϕ に z 成分が含まれている可能性があるため一般的に取り扱い、

増分 = ($A_\phi dl_\phi$ の z に対する偏微分)・dz

と偏微分項に入れ込む。結局、



C→D の線積分 = $\boxed{-A_\phi dl_\phi - \dfrac{\partial}{\partial z}(A_\phi dl_\phi)dz}$

と形式的に書ける。微分線素に値を代入して整理すると、

(A→B の線積分)+(C→D の線積分) = $\boxed{-\dfrac{\partial A_\phi}{\partial z}\cdot r\,d\phi\,dz}$

となる。同様にして、

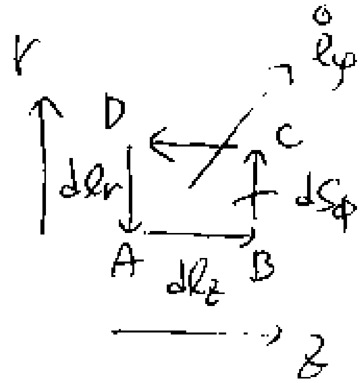
(B→C の線積分)+(D→A の線積分) = $\boxed{\dfrac{\partial A_z}{\partial \phi}\,d\phi\,dz}$

となる。結局、r 軸を左に回す強さ、つまり、rot$\boldsymbol{A}$ の r 成分、$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{i}_r$ は dS_r を考慮して、

$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{i}_r = \boxed{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial A_\phi}{\partial z}}$

となる。

次に、ϕ軸について考える。右図を参考にすると、r軸と同様にして、



A→B の線積分＝ $A_z dl_z$

C→D の線積分＝ $-A_z dl_z - \frac{\partial}{\partial r}(A_z dl_z) dr$

微分線素に値を代入して、

(A→B の線積分)＋(C→D の線積分)＝ $-\frac{\partial A_z}{\partial r} dr dz$

同様に、

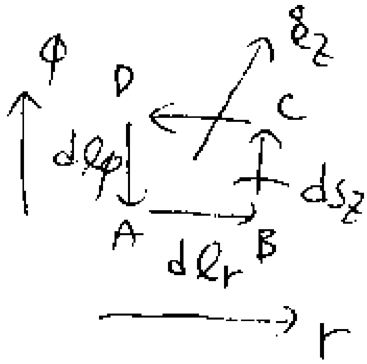
(B→C の線積分)＋(D→A の線積分)＝ $\frac{\partial A_r}{\partial z} dr dz$

結局、rot$A$ の ϕ成分、(rot$A$)$\cdot i_\phi$は、

$$(\mathrm{rot}A)\cdot i_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

となる。

同様にして、右図から z 軸については、



(A→B の線積分)＋(C→D の線積分)＝ $-\frac{\partial A_r}{\partial \phi} dr d\phi$

(B→C の線積分)＋(D→A の線積分)＝ $\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} dr d\phi$

で、rot$A$ の z 成分、(rot$A$)$\cdot i_z$は、

$$(\mathrm{rot}A)\cdot i_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$

となる。

以上から、rot$A$ は、

$$\mathrm{rot}A = \mathring{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \mathring{e}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \mathring{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$

である。