

(直交座標系における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ のベクトル公式)基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 測度係数 h_1, h_2, h_3 である直交座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\mathbf{A}$ の発散は, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right]$ であらわされる. 円

柱座標系及び球座標系ではそれぞれどのように表されるか. なお, 計算は省略しないこと.

$$20 \quad (1) \text{ 円柱座標系: } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(A_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(A_z \cdot r)}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$20 \quad (2) \text{ 球座標系: } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_r \cdot r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta \cdot r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_\varphi \cdot r \sin \theta)}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

(球座標系 (r, θ, φ) における flux の計算)原点 O を中心とし, 半径 r の球面 S を貫いて外方に出て行くベクトル界 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r}$ の力線の束 (flux), すなわち総線束; $\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ を以下のように求める. ここで, 球座標系 (r, θ, φ) の基本ベクトルを $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ とし, $\mathbf{n}$ は球の表面に垂直で外方向を向く単位ベクトルである. 以下の間に答えよ.20 (3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{e}_r \quad r, \theta, \varphi \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \cdot \mathbf{e}_r d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{r} r \cdot r \sin \theta d\theta d\varphi = r \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

20 (4) (3) を用いて半径 a の球面を貫く力線 $\mathbf{A}$ の総線束 Φ を求めよ.

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \oint_S r \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi a [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi a \end{aligned}$$

20 (5) ガウスの発散定理を用いて計算して (4) の結果と一致することを示せ.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \\ \therefore \Phi &= \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (5) \\ &= \int_V \frac{1}{r^2} d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = [r]_0^a [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi a \end{aligned}$$