

電磁理論 IA & IB (Aクラス)	2008 年 4 月 30 日	学籍番号	氏名	評点
ミニツレポート 番外1				

(ガウスの定理)

$A = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$ のとき、 $\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ をガウスの定理を用いて求めよ。ただし、 $\mathbf{n}$ は閉局面 S 上の外向き法線ベクトル、 V は S が囲む体積とする。

$$\begin{aligned} \text{Divergence theorem} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \\ &= \int_V (a + b + c) dV \\ &= (a + b + c) V \end{aligned}$$

(勾配と発散の計算)

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ で、 $|\mathbf{r}| = r$ とする。このとき以下の式を証明せよ。

(1) $\nabla r = \mathbf{r}/r$

$$\begin{aligned} \nabla r &= \mathbf{i}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \\ \therefore \nabla r &= \frac{1}{r} (\mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z) = \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

(2) $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$

$$\begin{aligned} \nabla(\log r) &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x}(\log r) + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y}(\log r) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}(\log r) \\ &= \mathbf{i}_x \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \left(\mathbf{i}_x \frac{x}{r} + \mathbf{i}_y \frac{y}{r} + \mathbf{i}_z \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \end{aligned}$$

(3) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\mathbf{i}_x \frac{x}{r} + \mathbf{i}_y \frac{y}{r} + \mathbf{i}_z \frac{z}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

(4) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 3 \end{aligned}$$