電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑨	2012年7月11日	学籍番号		氏名		評点	

（誘電体，磁性体，境界条件）

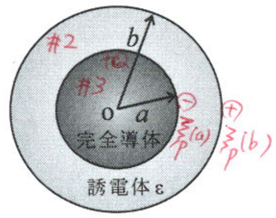
（1）分極電荷密度ρ_pと分極ベクトル$\boldsymbol{P}$の間に成立する関係式，及び分極ベクトル$\boldsymbol{P}$に関する境界条件を記述せよ．

$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbb{P}\ ,\quad \xi_p = -\mathbb{n}\cdot(\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_2)$$

（2）磁化電流密度$\boldsymbol{J}_m$と磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$の間に成立する関係式，及び磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$に関する境界条件を記述せよ．

$$\mathbb{J}_m = \nabla\times\mathbb{M}\ ,\quad \mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1-\mathbb{M}_2)$$

（3）半径aなる完全導体球が内径a，外径b，誘電率εの誘電体球核によって包まれている．完全導体球にQなる電荷を与えるとき，この系の内部における電界分布および誘電体球核の表面$r=a$と$r=b$に現れる面分極電荷の密度$\xi_p(a)$および$\xi_p(b)$を求めよ．



完全導体内部には電荷も電界も存在しない。又その誘電率および透磁率はε_0, μ_0である。
対称性が良い系なので電界を求めるために、電束に関するガウスの法則の積分形を用いる。

$$\oint_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}dS = \int_V \rho\, dV \quad (\mathbb{D}=\varepsilon\mathbb{E})$$

・$r<a$　$\varepsilon_0\mathbb{E}\cdot\hat{\mathbb{r}}_r 4\pi r^2 = 0$　$\therefore E_r = 0$

・$a<r<b$　$\varepsilon\mathbb{E}\cdot\hat{\mathbb{r}}_r 4\pi r^2 = Q$　$\therefore E_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

・$r>b$　$\varepsilon_0\mathbb{E}\cdot\hat{\mathbb{r}}_r 4\pi r^2 = Q$　$\therefore E_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

次に分極ベクトル$\mathbb{P}$を求める。

$\mathbb{D} = \varepsilon_0\mathbb{E}+\mathbb{P}$ より $\mathbb{P} = \underbrace{\mathbb{D}}_{\varepsilon\mathbb{E}} - \varepsilon_0\mathbb{E} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbb{E}$

#1〜#3の領域を図のようにとると

#1 $\mathbb{P}_1=0$　#2 $\mathbb{P}_2$　#3 $\mathbb{P}_3=0$　$\mathbb{n} = \hat{\mathbb{r}}_r$

・$r>b$　$\mathbb{P}_1 = (\varepsilon_0-\varepsilon_0)\mathbb{E} = 0$

・$a<r<b$　$\mathbb{P}_2 = (\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbb{E}$

・$r<a$　$\mathbb{P}_3 = (\varepsilon_0-\varepsilon_0) = 0$

→(※)

↓(※)

面分極電荷密度ξ_pは

$\xi_p = -(\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_2)\cdot\mathbb{n}$ より

$$\xi_p(b) = -(\underset{0}{\mathbb{P}_1}-\mathbb{P}_2)\cdot\mathbb{n}_{2\to1} = +\mathbb{P}_2\cdot\mathbb{n} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbb{E}\cdot\hat{\mathbb{r}}_r$$

$$= \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\xi_p(a) = -(\mathbb{P}_2-\underset{0}{\mathbb{P}_3})\cdot\mathbb{n} = -\mathbb{P}_2\cdot\mathbb{n} = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbb{E}\cdot\hat{\mathbb{r}}_r$$

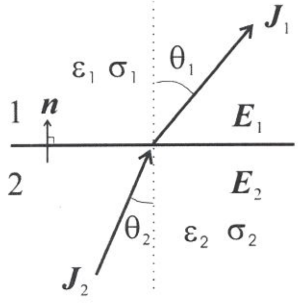
$$= -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon a^2} = \frac{-Q}{4\pi a^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

(ref) $\displaystyle\int_S \xi_p(a)dS + \int_S \xi_p(b)dS$

$$= -\frac{Q}{4\pi a^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\cdot 4\pi a^2 + \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\cdot 4\pi b^2$$

$= 0$ → 完全導体の電荷Qによって誘起された誘電体における電荷の総和はゼロ

（4）誘電率がε_1，導電率がσ_1なる媒質1と誘電率がε_2，導電率がσ_2なる媒質2の境界面を横切って$\boldsymbol{J}$なる電流密度の定常電流が流れているとき，この境界面に現れる自由電荷の密度（面電荷密度ξ）を求めよ．



$\mathbb{J}_c = \sigma\mathbb{E}$（オームの法則）より $\mathbb{J}_1 = \sigma_1\mathbb{E}_1$, $\mathbb{J}_2 = \sigma_2\mathbb{E}_2$

境界条件 $\mathbb{n}\cdot(\mathbb{D}_1-\mathbb{D}_2) = \xi$ より $\mathbb{n}\cdot(\varepsilon_1\mathbb{E}_1-\varepsilon_2\mathbb{E}_2) = \xi$

$$\therefore \xi = \mathbb{n}\cdot(\varepsilon_1\mathbb{E}_1-\varepsilon_2\mathbb{E}_2) = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\mathbb{n}\cdot\mathbb{J}_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\mathbb{n}\cdot\mathbb{J}_2 \quad \text{―①}$$

電流電荷保存の式 $\nabla\cdot\mathbb{J} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$（∵定常）

$$\therefore \int_V \nabla\cdot\mathbb{J}dV = \int_S \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}dS = 0 \quad \therefore \mathbb{n}\cdot(\mathbb{J}_1-\mathbb{J}_2) = 0 \quad \therefore \mathbb{n}\cdot\mathbb{J}_2 = \mathbb{n}\cdot\mathbb{J}_1 \ (=J_n)$$

ただし$\mathbb{n}$は#2→#1に向く法線単位ベクトル，J_nは$\mathbb{J}$の$\mathbb{n}$方向成分

①へ代入すると

$$\xi = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)(\mathbb{n}\cdot\mathbb{J}_{1,2}) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J_n$$