

電磁理論 IA&IB ミニツレポート B⑦	2012 年 6 月 20 日	学籍番号		氏名		評点	
--------------------------	-----------------	------	--	----	--	----	--

(マクスウェル方程式の直接的適用 (静電磁界))

真空中に内径 1, 外径 2 の円筒核状の定常電流 $\mathbf{J}(r)=i_z J(r)$ が流れている. ここで, $J(r)=J_0 r$ ($r<1$), J_0 ($1<r<2$), 0 ($2<r$) であり, i_z は z 軸方向の基本ベクトルとする. 以下に答えよ.

(1) アンペア・マクスウェルの法則を表すマクスウェル方程式を記述せよ.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \left(\text{or } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\quad \left(\text{or } \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

(2) 円筒核の内中外の磁界 $\mathbf{H}$ を求める為に解くべき微分方程式を上記の法則より導出せよ.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\phi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\hat{r} \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial z} \right\} + r\hat{\phi} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} \right]$$

$$\therefore \hat{r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right\} + \hat{\phi} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} = \begin{cases} \hat{z} J_0 r & (r < 1) \\ \hat{z} J_0 & (1 < r < 2) \\ 0 & (r > 2) \end{cases}$$

系の z 軸対称性より $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ であり
 z 方向無限長一様性より $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ と $H_z = 0$
 したがって $\mathbf{H}$ は ϕ 成分 H_ϕ のみより解くべき微分方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) = \begin{cases} J_0 r & (r < 1) \\ J_0 & (1 < r < 2) \\ 0 & (r > 2) \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

(3) 円筒核の内中外の磁界 $\mathbf{H}$ を求める為に使用する境界条件を表す一般的式を記述し, 本問題における境界条件を求めよ. 但し, 表面電流密度 $\mathbf{K} = 0$ である.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$$

本問題では境界に表面電流 $\mathbf{K}$ が存在しないので $\mathbf{K} = 0$ より $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} = 0$

$\therefore$ 境界 $r=1$ および $r=2$ で $\mathbf{H}$ の接線成分 H_ϕ は連続.

$$\therefore H_{\phi 1} - H_{\phi 2} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

(4) (2) と (3) より磁界 $\mathbf{H}$ を求め, また $\mathbf{H}$ の大きさの分布を図示せよ.

① より

i) $r < 1$ において

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) = J_0 r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) = J_0 r^2$$

$$rH_\phi = \frac{J_0}{3} r^3 + C_1$$

$$H_\phi = \frac{J_0}{3} r^2 + \frac{C_1}{r}$$

$r=0$ で H_ϕ は有限より $C_1 = 0$

$$\therefore H_\phi = \frac{J_0}{3} r^2$$

iii) $r > 2$ において

$$\frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) = 0$$

$$rH_\phi = C_3$$

$$H_\phi = \frac{C_3}{r}$$

境界条件 (2) を用いて

$r=1$ で $H_\phi = \frac{J_0 \cdot 1^2}{3} = \frac{J_0}{3} + \frac{C_2}{1}$

$$\therefore C_2 = \frac{J_0}{3} - \frac{J_0}{2} = -\frac{J_0}{6}$$

$r=2$ で $H_\phi = \frac{J_0 \cdot 2^2}{3} + \frac{C_2}{2} = \frac{C_3}{2}$

$$\therefore C_3 = 2J_0 + C_2 = 2J_0 - \frac{J_0}{6} = \frac{11}{6} J_0$$

$\therefore H_\phi = \begin{cases} \frac{J_0 r^2}{3} & r < 1 \\ \frac{J_0 r}{2} - \frac{J_0}{6r} & 1 \leq r \leq 2 \\ \frac{11}{6} \frac{J_0}{r} & r > 2 \end{cases}$

$\therefore \mathbf{H} = \begin{cases} \hat{\phi} \frac{J_0 r^2}{3} & r < 1 \\ \hat{\phi} \left(\frac{J_0 r}{2} - \frac{J_0}{6r} \right) & 1 \leq r \leq 2 \\ \hat{\phi} \frac{11}{6} \frac{J_0}{r} & r > 2 \end{cases}$

$|\mathbf{H}| = H_\phi$

(附解) 積分形を用ひ