電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑥	2012年6月13日	学籍番号		氏名		評点	

（マクスウェル方程式の直接的適用（静電磁界））

真空中 y-z 平面に厚さゼロの無限一様シート状電荷(面電荷密度 ξ)の静止電荷分布が $x=0$ にある．以下に答えよ．

（１）電束に関するガウスの法則を表すマクスウェル方程式を記述せよ．

$$\nabla\cdot\mathbb{D} = \rho$$

or

$$\left(\nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \rho\right)$$

（２）電界 $\boldsymbol{E}$ を求める為に解くべき微分方程式を上記の法則より導出せよ．

$$\nabla\cdot\mathbb{D} = \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \frac{\partial(\varepsilon_0E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_0E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon_0E_z)}{\partial z} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (\xi & x=0\,)\cdots\text{なくてもOK.} \\ 0 & x>0 \end{cases}$$

系の対称性(平面対称性)より電界は x 方向成分 E_x のみで $x>0$ と $x<0$ で逆方向

又系は y 方向, z 方向に一様より $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

したがって解くべき微分方程式は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (\frac{\xi}{\varepsilon_0} & x=0 \cdots\text{なくてもOK}\,) \\ 0 & x>0 \end{cases} \quad \left(\text{or}\ \frac{\partial(\varepsilon_0E_x)}{\partial x} = \frac{d(\varepsilon_0E_x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}\ \text{でもOK}\right) \quad ①$$

（３）電界 $\boldsymbol{E}$ を求める為に使用する境界条件を表す一般的な式を記述し，本問題における境界条件を求めよ．

$$\mathbb{n}\cdot(\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) = \xi\ (\neq 0) \quad \left(\text{or}\ \mathbb{n}\cdot(\varepsilon_0\mathbb{E}_1 - \varepsilon_0\mathbb{E}_2) = \xi \neq 0\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{n}\cdot(\varepsilon_0\mathbb{E}_1 - \varepsilon_0\mathbb{E}_2) = \xi \quad —②$$

∴ $x=0$ で $\mathbb{E}$ の法線成分すなわち E_x はシート状電荷(表面電荷)の分不連続。

（４）（２）と（３）より電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．また $|\boldsymbol{E}|$ の x 方向の分布を図示せよ．

①より

$x<0$ で $E_x = C_1$ ③　　系の対称性より $C_1 = -C_2$ —⑤

$x>0$ で $E_x = C_2$ ④

②より $x=0$ での境界条件より ③④より

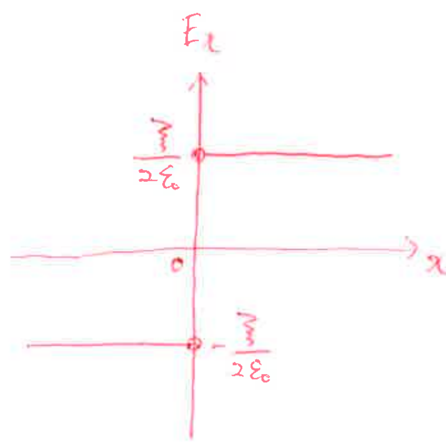
$$\varepsilon_0C_2 - \varepsilon_0C_1 = \xi$$

⑤より

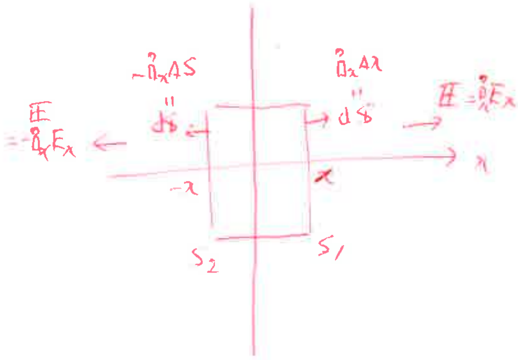
$$\varepsilon_0C_2 + \varepsilon_0C_2 = \xi \quad \therefore\ C_2 = \frac{\xi}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ E_x = \begin{cases} -\frac{\xi}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ \frac{\xi}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \mathbb{E} = \begin{cases} -\mathbb{i}_x\frac{\xi}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ \mathbb{i}_x\frac{\xi}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$$



(別解) 積分形より



電束に関するガウスの法則

$$\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int \rho\, dV$$

左辺 $= \displaystyle\int_{S_1} \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot \mathbf{n}\,dS + \int_{S_2} \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot \mathbf{n}\,dS$

$= \varepsilon_0 E_x \mathring{i}_x \cdot \mathring{i}_x \Delta S + (-\varepsilon_0 E_x \mathring{i}_x)\cdot(-\mathring{i}_x \Delta S)$

$= 2\varepsilon_0 E_x \Delta S$

右辺 $= \xi \Delta S$

$\therefore\quad 2\varepsilon_0 E_x \Delta S = \xi \Delta S$

$\therefore\quad E_x = \dfrac{\xi}{2\varepsilon_0}$

$$\therefore\quad \mathbf{E} = \begin{cases} -\mathring{i}_x \dfrac{\xi}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ \mathring{i}_x \dfrac{\xi}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$$