

電磁理論 IA&IB ミニツレポート B⑤	2012年 6月 6日	学籍番号		氏名		評点	
--------------------------	-------------	------	--	----	--	----	--

(1) マクスウェル方程式の中で、電束に関するガウスの法則について以下に答えよ。

(1-1) 積分形から微分形を導け。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \text{ としても可})$$

ガウスの発散定理より

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

(1-2) 上記の微分形を円柱座標(r, φ, z)系の場合に適用するとき、解くべき微分方程式を記述せよ。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \therefore \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\epsilon_0 E_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\epsilon_0 E_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\epsilon_0 E_z r)}{\partial z} \right] = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\epsilon_0 E_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\epsilon_0 E_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\epsilon_0 E_z)}{\partial z} = \rho$$

$$\left(\text{or } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

(1-3) 同様に球座標(r, θ, φ)系の場合に適用するとき、解くべき微分方程式を記述せよ。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \therefore \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(\epsilon_0 E_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\epsilon_0 E_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\epsilon_0 E_\varphi r \sin \theta)}{\partial \varphi} \right] = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \epsilon_0 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\epsilon_0 E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\epsilon_0 E_\varphi) = \rho$$

$$\left(\text{or } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

(2) マクスウェル方程式の中で、アンペア・マクスウェルの法則について以下に答えよ。

(2-1) 積分形から微分形を導け。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \text{ としても可})$$

ストークスの定理より

$$\therefore (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad \therefore \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(2-2) 上記の微分形を静磁界で、かつ直角座標(x, y, z)系に適用するとき、解くべき微分方程式を記述せよ。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\because \text{静磁界}) \quad (\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \text{ としても可})$$

$$\therefore \hat{a}_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \hat{a}_x J_x + \hat{a}_y J_y + \hat{a}_z J_z$$

$$\left(\text{or } \hat{a}_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \hat{a}_x \mu_0 J_x + \hat{a}_y \mu_0 J_y + \hat{a}_z \mu_0 J_z \text{ としても可} \right)$$

(2-3) 同様に円柱座標(r, φ, z)系の場合に適用するとき、解くべき微分方程式を記述せよ。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{or } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J})$$

$$\frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & r H_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\hat{a}_r \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(r H_\varphi) \right\} + r \hat{a}_\varphi \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{a}_z \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} \right]$$

$$= \hat{a}_r J_r + \hat{a}_\varphi J_\varphi + \hat{a}_z J_z$$

$$\therefore \hat{a}_r \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right\} + \hat{a}_\varphi \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{a}_z \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} = \hat{a}_r J_r + \hat{a}_\varphi J_\varphi + \hat{a}_z J_z$$

$$\left(\text{or } \hat{a}_r \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right\} + \hat{a}_\varphi \left\{ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right\} + \hat{a}_z \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\} = \hat{a}_r \mu_0 J_r + \hat{a}_\varphi \mu_0 J_\varphi + \hat{a}_z \mu_0 J_z \text{ としても可} \right)$$