電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B②	2012 年 5 月 23 日	学籍番号		氏名		評点	

(真空中の電磁界基本法則 I)

（1） 半径 a の円柱状の定常電流(電流密度 $\boldsymbol{J}(r)=\boldsymbol{i}_z Jr$)が軸方向に流れている．以下に答えよ．(J は定数)

1.1 アンペアの周回積分の法則(積分形)を記述せよ．

$$\oint_C \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \mathbb{n}\, dS \quad \left(\oint_C \mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\, dS \text{ でも可}\right)$$

1.2 上の法則を用いて円柱内外の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．また $|\boldsymbol{B}|$ の r 方向分布を図示せよ．

z 軸方向に無限長の定常電流 $\mathbb{J}=\hat{i}_z Jr$ (J は定数) で円柱対称系なので

$\mathbb{B}$ は φ 方向成分 B_φ のみをもつ。r が同じなら B_φ は一定 ∴ $\mathbb{B}=\hat{i}_\varphi B_\varphi$，$d\boldsymbol{l}=\hat{i}_\varphi h_\varphi d\varphi=\hat{i}_\varphi r\,d\varphi$，

$\mathbb{n}=\hat{i}_z$，$\mathbb{n}\,dS=dS_z=d\boldsymbol{l}_r\times d\boldsymbol{l}_\varphi=\hat{i}_z r\,dr\,d\varphi$ より

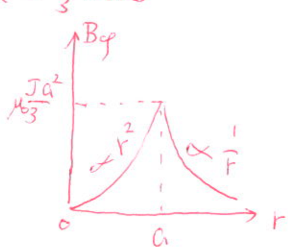
1.1 の法則において半径 r の周回を考えて，$\frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{1}{\mu_0}\hat{i}_\varphi B_\varphi\cdot\hat{i}_\varphi r\,d\varphi=\frac{1}{\mu_0}B_\varphi r\,d\varphi$，$\mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\,dS=\hat{i}_z Jr\cdot\hat{i}_z r\,dr\,d\varphi = Jr^2\,dr\,d\varphi$

左辺 $=\oint_C \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\mu_0}B_\varphi r\,d\varphi=\frac{1}{\mu_0}B_\varphi r[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{2\pi r}{\mu_0}B_\varphi$

右辺は $r<a$ のとき $\int \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^r Jr^2\,dr\,d\varphi=J\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi}=J\cdot\frac{1}{3}r^3\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi r^3 J$

$r>a$ のとき $\int \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^a Jr^2\,dr\,d\varphi=J\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a[\varphi]_0^{2\pi}=J\cdot\frac{1}{3}a^3\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi a^3 J$

$$\therefore \frac{2\pi r}{\mu_0}B_\varphi=\begin{cases}\frac{2}{3}\pi r^3 J\\ \frac{2}{3}\pi a^3 J\end{cases} \quad \therefore B_\varphi=\begin{cases}\mu_0\frac{1}{3}Jr^2 & r<a\\ \mu_0\frac{1}{3}J\frac{a^3}{r} & r\geq a\end{cases} \quad \therefore \mathbb{B}=\begin{cases}\hat{i}_\varphi\mu_0\frac{1}{3}Jr^2 & r<a\\ \hat{i}_\varphi\mu_0\frac{1}{3}J\frac{a^3}{r} & r\geq a\end{cases}$$



1.3 全電流 $\boldsymbol{I}$ とするとき，$\boldsymbol{I}$ を用いて $\boldsymbol{B}$ を表せ．

1.2 より $I=\frac{2}{3}\pi a^3 J$ ∴ $J=\frac{I}{\frac{2}{3}\pi a^3}$

$$\therefore \mathbb{B}=\begin{cases}\hat{i}_\varphi\mu_0\frac{I}{2\pi a^3}r^2 & r<a\\ \hat{i}_\varphi\mu_0\frac{I}{2\pi r} & r\geq a\end{cases}$$
(円柱外では r=0 に I の線電流がある場合と等価．)

（2） 半径 a の円柱状静止電荷分布(電荷密度 $\rho(r)=\rho_0 r$ (ρ_0 は定数))がある．次に答えよ．

2.1 電束に関するガウスの法則(積分形)を記述せよ．電荷密度 ρ[C/m^3]を用いて表現せよ．

$$\oint_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\,dS=\int_V \rho\,dV \quad \left(\oint_S \varepsilon_0\mathbb{E}\cdot\mathbb{n}\,dS=\int_V\rho\,dV \text{ でも可}\right)$$

2.2 上記の法則を用いて円筒内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．また $|\boldsymbol{E}|$ の r 方向分布を図示せよ．但し，z 方向は単位長を考えること．

z 軸方向無限長で円柱対称より電界 $\mathbb{E}$ は r 成分 E_r のみでかつ r が同じなら値は同じ

∴ $\mathbb{D}=\hat{i}_r\varepsilon_0 E_r(r)$，$\mathbb{n}\,dS=dS_r=d\boldsymbol{l}_\varphi\times d\boldsymbol{l}_z=\hat{i}_r r\,d\varphi\,dz$，又 $dV=d\boldsymbol{l}_r\cdot(d\boldsymbol{l}_\varphi\times d\boldsymbol{l}_z)=r\,dr\,d\varphi\,dz$

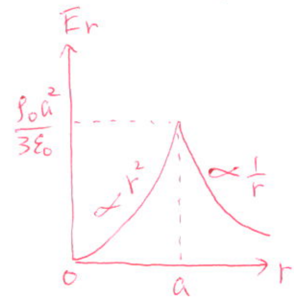
2.1 の法則より半径 r の円柱 (z 方向長さ 1) を考えて $\mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\,dS=\hat{i}_r\varepsilon_0 E_r(r)\cdot\hat{i}_r r\,d\varphi\,dz=\varepsilon_0 r E_r(r)\,d\varphi\,dz$

左辺 $=\int_0^1\int_0^{2\pi}\varepsilon_0 r E_r(r)\,d\varphi\,dz=\varepsilon_0 r E_r(r)[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1=2\pi r\varepsilon_0 E_r(r)$

右辺において $r<a$ のとき $\int_V \rho\,dV=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho_0 r\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=\rho_0\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1=\frac{2\pi}{3}\rho_0 r^3$

$r>a$ のとき $\int_V \rho\,dV=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho_0 r\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=\rho_0\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1=\frac{2\pi}{3}\rho_0 a^3$

$$\therefore 2\pi r\varepsilon_0 E_r(r)=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}\rho_0 r^3\\ \frac{2\pi}{3}\rho_0 a^3\end{cases} \quad \therefore E_r(r)=\begin{cases}\frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0} & r<a\\ \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r\geq a\end{cases} \quad \therefore \mathbb{E}=\begin{cases}\hat{i}_r\frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0} & r<a\\ \hat{i}_r\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r\geq a\end{cases}$$



2.3 z 軸方向単位長さ当りの全電荷を q とするとき，q を用いて $\boldsymbol{E}$ を表せ．

2.2 より $q=\frac{2\pi}{3}\rho_0 a^3$ ∴ $\rho_0=\frac{q}{\frac{2\pi}{3}a^3}$

$$\therefore \mathbb{E}(r)=\begin{cases}\hat{i}_r\frac{q}{2\pi a^3\varepsilon_0}r^2 & r<a\\ \hat{i}_r\frac{q}{2\pi r\varepsilon_0} & r\geq a\end{cases}$$
(円柱外では r=0 に単位長さ当りの電荷 q が存在することと等価)

（3） 電荷保存の法則(積分形)を記述せよ．

$$\oint_S \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\,dS=-\frac{d}{dt}\int_V\rho\,dV$$