電磁理論 IA & IB (A クラス) ミニッツレポート B①	2012 年 5 月 23 日	学籍番号		氏名		評点	

（束(Flux)と循環(Circulation)）

（1）直角座標系(x, y, z)においてベクトル界$\boldsymbol{A}\,(=\boldsymbol{i}_x A_x(x))$がある．ここで$\boldsymbol{i}_x$は直角座標系$(x, y, z)$の基本ベクトル，$A_x(x)$は$\boldsymbol{A}$の$x$方向成分で$x$のみの関数とする．

（1－1）原点を中心としx方向に厚さ$2d$のy-z平面に広がる無限平板上の面($y = -1\sim1, z = -1\sim1$)を貫いて外方へ出て行く力線の束(Flux)，即ち総線束；$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n}dS$を求めよ．ここで$\boldsymbol{n}$は外向き法線単位ベクトルである．

$\boldsymbol{n}dS = d\boldsymbol{S}_x = d\boldsymbol{l}_y \times d\boldsymbol{l}_z = \boldsymbol{i}_y dy \times \boldsymbol{i}_z dz = \boldsymbol{i}_y \times \boldsymbol{i}_z dydz = \boldsymbol{i}_x dydz$

$\therefore \boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{i}_x A_x(x) \bullet \boldsymbol{i}_x dydz = \boldsymbol{i}_x\bullet\boldsymbol{i}_x A_x(x)dydz = A_x(x)dydz$

$\therefore \Phi_{x+} = \left[\oint_S \boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{n}dS\right]_{x=d} = \left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} A_x(x)dydz\right]_{x=d} = \left[A_x(x)[y]_{-1}^{1}[z]_{-1}^{1}\right]_{x=d} = \left[4A_x(x)\right]_{x=d} = 4A_x(d)$

同様に $\Phi_{x-} = 4A_x(-d)$ $\quad\therefore \Phi = \Phi_{x+} - \Phi_{x-} = 4(A_x(d) - A_x(-d))$

（1－2）ガウスの発散定理を用いた結果が上記の結果と一致することを示せ.(但しx=0 で$\boldsymbol{A}$は有界)

$\nabla\bullet\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right] = \frac{dA_x(x)}{dx}$

$dV = d\boldsymbol{l}_x\bullet(d\boldsymbol{l}_y\times d\boldsymbol{l}_z) = \boldsymbol{i}_x dx\bullet(\boldsymbol{i}_y dy\times\boldsymbol{i}_z dz) = \boldsymbol{i}_x\bullet(\boldsymbol{i}_y\times\boldsymbol{i}_z)dxdydz = (\boldsymbol{i}_x\bullet\boldsymbol{i}_x)dxdydz = dxdydz$

$\therefore \int_V \nabla\bullet\boldsymbol{A}dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-d}^{d}\frac{dA_x(x)}{dx}dxdydz = [A_x(x)]_{-d}^{d}[y]_{-1}^{1}[z]_{-1}^{1} = 4(A_x(d) - A_x(-d))$

$\therefore$ 一致

（1－3）平板内を一定の電荷密度ρで満たされているとき，電荷量$Q(|x|) = \int_V \rho dV$を求めよ．但し，y=-1～1, z=-1～1 とする．（ヒント：$|x|$で場合分けすることが必要）

$dV = dxdydz$

$|x|<d$ のとき $Q(|x|) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{x}\rho\,dxdydz = \rho[x]_{-x}^{x}[y]_{-1}^{1}[z]_{-1}^{1} = \rho\{x-(-x)\}\{1-(-1)\}\{1-(-1)\} = 8\rho|x|$

$|x|\geq d$ のとき $Q(|x|) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-d}^{d}\rho\,dxdydz = \rho[x]_{-d}^{d}[y]_{-1}^{1}[z]_{-1}^{1} = \rho\{d-(-d)\}\{1-(-1)\}\{1-(-1)\} = 8\rho d$

（2）円柱座標系(r,φ,z)においてベクトル界$\boldsymbol{B}\,(=\boldsymbol{i}_\varphi B_\varphi(r))$がある．ここで$\boldsymbol{i}_\varphi$は円柱座標系の基本ベクトル，$d\boldsymbol{\ell}$は半径$r$の周回$C$上の微分線素ベクトル，$B_\varphi(r)$は$\boldsymbol{B}$の$\varphi$方向成分で$r$のみの関数とする．

（2－1）半径rの周回Cでの循環；$F = \oint_C \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{\ell}$を求めよ．

$d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{l}_r + d\boldsymbol{l}_\varphi + d\boldsymbol{l}_z$
$= \boldsymbol{i}_r dl_r + \boldsymbol{i}_\varphi dl_\varphi + \boldsymbol{i}_z dz = \boldsymbol{i}_r h_r dr + \boldsymbol{i}_\varphi h_\varphi d\varphi + \boldsymbol{i}_z h_z dz$
$= \boldsymbol{i}_r dr + \boldsymbol{i}_\varphi r d\varphi + \boldsymbol{i}_z dz$

$\boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}_\varphi B_\varphi(r)\bullet d\boldsymbol{l}_\varphi = \boldsymbol{i}_\varphi B_\varphi(r)\bullet\boldsymbol{i}_\varphi r d\varphi = \boldsymbol{i}_\varphi\bullet\boldsymbol{i}_\varphi B_\varphi(r) r d\varphi = B_\varphi(r) r d\varphi$

$\therefore F = \oint_C \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(r) r d\varphi = B_\varphi(r) r[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r B_\varphi(r)$

（2－2）ストークスの定理を用いた結果が上記の結果と一致することを示せ.(但しr=0 で$\boldsymbol{B}$は有界)

$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{i}_1 & h_2\boldsymbol{i}_2 & h_3\boldsymbol{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1B_1 & h_2B_2 & h_3B_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_r & r\boldsymbol{i}_\varphi & \boldsymbol{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rB_\varphi(r) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left\{\boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r)) - \boldsymbol{i}_r\frac{\partial}{\partial z}(rB_\varphi(r))\right\}$
$= \boldsymbol{i}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r)) - \boldsymbol{i}_r\underbrace{\frac{\partial B_\varphi(r)}{\partial z}}_{0} = \boldsymbol{i}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r))$

$\boldsymbol{n}dS = d\boldsymbol{S}_z = d\boldsymbol{l}_r\times d\boldsymbol{l}_\varphi = \boldsymbol{i}_r h_r dr\times\boldsymbol{i}_\varphi h_\varphi d\varphi = \boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{i}_\varphi r dr d\varphi = \boldsymbol{i}_z r dr d\varphi$

$\therefore (\nabla\times\boldsymbol{B})\bullet\boldsymbol{n}dS = \left\{\boldsymbol{i}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r))\right\}\bullet\boldsymbol{i}_z r dr d\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r))drd\varphi$

$\therefore \int_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\bullet\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi(r))drd\varphi = [rB_\varphi(r)]_0^r[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r B_\varphi(r)$ $\quad\therefore$ 一致

（2－3）z軸を中心にする半径aの円柱内を一定の電流密度$\boldsymbol{J}\,(=\boldsymbol{i}_z J)$で電流が流れているとき，電流量$I(r) = \int_S \boldsymbol{J}\bullet\boldsymbol{n}dS$を求めよ．（ヒント：場合分けが必要）

$\boldsymbol{n}dS = d\boldsymbol{S}_z = d\boldsymbol{l}_r\times d\boldsymbol{l}_\varphi = \boldsymbol{i}_r h_r dr\times\boldsymbol{i}_\varphi h_\varphi d\varphi = \boldsymbol{i}_z r dr d\varphi$

$\therefore \boldsymbol{J}\bullet\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{i}_z J\bullet\boldsymbol{i}_z r dr d\varphi = J r dr d\varphi$

$\therefore r<a$ のとき $I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} J r dr d\varphi = J\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi} = J\cdot\frac{1}{2}r^2\cdot2\pi = \pi r^2 J$

$r\geq a$ のとき $I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J r dr d\varphi = J\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a[\varphi]_0^{2\pi} = J\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot2\pi = \pi a^2 J$