電磁理論 IA & IB (Aクラス) ミニッツレポート 復習+⑤	2012年5月16日	学籍番号		氏名		評点	100

『教科書のみ見てもよい』

(ベクトルの微分)

球座標における、$\boldsymbol{i}_r$、$\boldsymbol{i}_\theta$、$\boldsymbol{i}_\phi$ を直角座標系の基本ベクトルを用いて表せ。

15

$$\begin{cases} i_r = i_z\cos\theta + i_x\sin\theta\cos\varphi + i_y\sin\theta\sin\varphi \\ i_\theta = i_x\cos\theta\cos\varphi + i_y\cos\theta\sin\varphi - i_z\sin\theta \\ i_\varphi = -i_x\sin\varphi + i_y\cos\varphi \end{cases}$$

$\dfrac{\partial \boldsymbol{i}_r}{\partial \varphi}$ を計算し、$\boldsymbol{i}_\phi$ を用いて表せ。

5

$$\frac{\partial i_r}{\partial \varphi} = -i_x\sin\theta\sin\varphi + i_y\sin\theta\cos\varphi$$
$$= i_\varphi\sin\theta$$

(ストークスの定理)

ベクトル $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i}_x + x\boldsymbol{i}_y$ について、教科書 p.279 の A.107 式に示すストークスの定理の右辺と左辺をそれぞれ別々に計算し一致することを確かめよ。ただし、積分経路 C : (0,0)→(1,0)→(1,1)→(0,1)→(0,0)とする。

30

$$\oint_C A\cdot dl = \int_0^1 A\cdot i_x dx + \int_0^1 A\cdot i_y dy + \int_1^0 A\cdot i_x dx + \int_1^0 A\cdot i_y dy$$
$$= 0 + \int_0^1 dy + \int_1^0 -dx + 0$$
$$= 1-(-1) = 2$$

$$\int \nabla\times A\cdot n\,dS = \int\left(i_x\frac{\partial}{\partial x} + i_y\frac{\partial}{\partial y} + i_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(-y i_x + x i_y)\cdot i_z\cdot dS_z$$
$$= \int(0 + i_z + i_z + 0 + 0 + 0)\cdot i_z\cdot dS_z$$
$$= \int 2\,dS_z = 2$$

（ガウスの定理（再復習））

原点 O を中心とし，半径 r の球面 S を貫いて外方に出て行くベクトル界 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_r(1/r)$の、半径 a の球面を貫く力線 $\boldsymbol{A}$ の flux，すなわち総線束、$\Phi=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$、を求めよ。なお，球座標系$(r,\theta,\varphi)$の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$とし，$\boldsymbol{n}$ は球の表面に垂直で外方向を向く単位ベクトルである．

20

$$
\begin{aligned}
A\cdot n\,dS &= A\cdot i_r\,dS_r \\
&= i_r\frac{1}{r}\, i_r\, dl_\theta dl_\varphi \\
&= r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&= 2\pi a\,(-\cos\theta)_0^\pi \\
&= 4\pi a
\end{aligned}
$$

ガウスの発散定理を用いて計算し、上の結果と一致することを確かめよ．

10

$$
\nabla\cdot A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_S A\cdot n\,dS = \int_V \nabla\cdot A\,dV \\
&= \int_V \frac{1}{r^2}\,dl_r\, dl_\theta\, dl_\varphi = \int_V \frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= [r]_0^a\,[-\cos\theta]_0^\pi\,[\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi a
\end{aligned}
$$

（回転）

円柱座標系における rot$\boldsymbol{A}$ について、

5

$$
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{i}_z = \boxed{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}}
$$

となる。

（距離ベクトル（再復習））

距離ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ r について勾配 ∇r^2 を計算せよ。

15

$$
\begin{aligned}
\nabla r^2 &= 2r\left(i_x\frac{\partial r}{\partial x} + i_y\frac{\partial r}{\partial y} + i_z\frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
&= 2r\left(i_x\frac{x}{r} + i_y\frac{y}{r} + i_z\frac{z}{r}\right) \\
&= 2r\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \\
&= 2\boldsymbol{r} \qquad (=2r\,i_r)
\end{aligned}
$$