電磁理論 IA & IB （A クラス） ミニッツレポート④	2012 年 5 月 9 日	学籍番号		氏名		評点	100

（直交座標系における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ のベクトル公式）『教科書及びノートは見ないこと』

基本ベクトル $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, 測度係数 h_1, h_2, h_3 である直交座標系（u_1, u_2, u_3）におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は， $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}+\dfrac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2}+\dfrac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$ であらわされる．球座標系ではどのように表されるか．なお、計算は省略しないこと。

10

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(A_r\cdot r^2\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\, r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi\cdot r)\right\}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

（球座標系(r,θ,φ)における flux の計算）

原点 O を中心とし，半径 r の球面 S を貫いて外方に出て行くベクトル界 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_r(1/r)$の、半径 a の球面を貫く力線 $\boldsymbol{A}$ の flux，すなわち総線束、$\Phi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$、を求めよ。なお，球座標系$(r,\theta,\varphi)$の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$とし，$\boldsymbol{n}$ は球の表面に垂直で外方向を向く単位ベクトルである．

30

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_r\,dS_r=\boldsymbol{i}_r\frac{1}{r}\boldsymbol{i}_r\,dl_\theta\,dl_\varphi=r\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Phi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\oint_S r\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=2\pi a(-\cos\theta)_0^\pi=4\pi a$$

ガウスの発散定理を用いて計算し、上の結果と一致することを確かめよ．

20

$$\Phi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dv$$

$$=\int_V\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r}\right)dl_r\,dl_\theta\,dl_\varphi$$

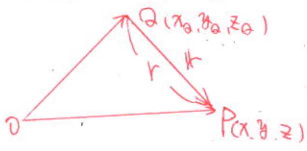
$$=\int_V\frac{1}{r^2}\cdot r^2\cdot\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=[r]_0^a[-\cos\theta]_0^\pi[\varphi]_0^{2\pi}=4\pi a$$

（距離ベクトル）

距離ベクトル $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}_r r$ とは何か。簡単に説明せよ。

2点間の距離 r の大きさを持ち、片方の点からもう片方の点への方向へ向かうベクトル． 20



距離ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ r の勾配 ∇r を計算せよ。

20

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}_x\frac{\partial}{\partial x}r+\boldsymbol{i}_y\frac{\partial}{\partial y}r+\boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}r$$

$$=\boldsymbol{i}_x\frac{x-x_Q}{r}+\boldsymbol{i}_y\frac{y-y_Q}{r}+\boldsymbol{i}_z\frac{z-z_Q}{r}$$

$$=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{i}_r$$