電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑨	2011 年 7 月 13 日	学籍番号		氏名		評点	

（誘電体，磁性体，境界条件）

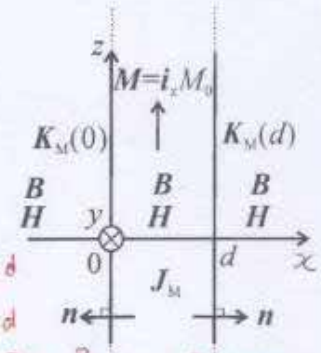
（1）分極電荷密度ρ_pと分極ベクトル$\boldsymbol{P}$の間に成立する関係式，及び分極ベクトル$\boldsymbol{P}$に関する境界条件を記述せよ．

$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbb{P}$, $\xi_p = -\mathbb{n}\cdot(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)$

（2）磁化電流密度$\boldsymbol{J}_m$と磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$の間に成立する関係式，及び磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$に関する境界条件を記述せよ．

$\mathbb{J}_m = \nabla\times\mathbb{M}$, $\mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2)$

（3）y-z 方向無限に広い磁性体平板(厚さ d)がこの平板に平行な方向に一様に磁化されている，すなわち，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{i}_z M_0$のとき，内部の磁化電流密度$\boldsymbol{J}_M$と両端面の面磁化電流密度$\boldsymbol{K}_M$，内部および外部に生ずる磁束密度$\boldsymbol{B}$，及び磁界の強さ$\boldsymbol{H}$を求めよ．



(i) $\mathbb{J}_M = \nabla\times\mathbb{M} = \left(\mathbb{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbb{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\mathbb{i}_z M_0 = 0$

(ii) 境界条件 $\mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2)$

$x=0$: #1 $\mathbb{M}_1=0$, #2 $\mathbb{M}_2=\mathbb{M}$, $\mathbb{n} = -\mathbb{i}_x$

$\mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2) = -\mathbb{i}_x\times(-\mathbb{M}) = -\mathbb{i}_x\times(-\mathbb{i}_z M_0) = -\mathbb{i}_y M_0$

$x=d$: #2 $\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$, #1 $\mathbb{M}_1$, $\mathbb{n} = \mathbb{i}_x$

$\mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2) = \mathbb{n}\times(-\mathbb{M}) = \mathbb{i}_x\times(-\mathbb{i}_z M_0) = \mathbb{i}_y M_0$

(iii) アンペア・マクスウェルの法則 $\nabla\times\mathbb{B}/\mu_0 = \mathbb{J}_M + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}$

$\mathbb{i}_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \mathbb{i}_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \mathbb{i}_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (-\mu_0 M_0\mathbb{i}_y & x=0) \\ 0 & 0<x<d \\ (\mu_0 M_0\mathbb{i}_y & x=d) \\ 0 & x>d \end{cases}$

系の対称性と y-z 方向一様性より $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

B_z 成分のみより解くべき微分方程式は

$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \begin{cases} \text{同上} & \\ -\mathbb{i}_x & x=0 \end{cases}$

$x=0$ 単独では #1 $\mathbb{n}$ #2

$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (-\mu_0 M_0 & x=0) \\ 0 & x>0 \end{cases}$

$\therefore B_z = \begin{cases} C_1 & x<0 \\ C_2 & x>0 \end{cases}$

境界条件 $\mathbb{n}\times(\mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_2) = \mathbb{n}\times(\mathbb{B}_1/\mu_0 - \mathbb{B}_2/\mu_0) = \mathbb{K}_m$ より

$-\mathbb{i}_x$ $\mathbb{i}_z$成分 $-\mathbb{i}_y$成分

$\mathbb{B}$の接線成分は $-\mathbb{i}_y\mu_0 M_0$ の分不連続

$\therefore -C_1 + C_2 = -\mu_0 M_0$

対称性より $C_1 = -C_2$

$\therefore C_1 = -\frac{\mu_0 M_0}{2}$, $C_2 = \frac{\mu_0 M_0}{2}$

$\therefore B_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0 M_0}{2} & x<0 \\ \frac{\mu_0 M_0}{2} & x>0 \end{cases}$

次に $x=d$ 単独では

$B_z = \begin{cases} C_3 & x<d \\ C_4 & x>d \end{cases}$

境界条件 $\mathbb{n}\times(\mathbb{B}_1/\mu_0 - \mathbb{B}_2/\mu_0) = +\mathbb{i}_y M_0$ より

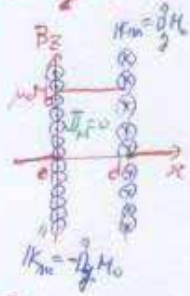
$\mathbb{i}_x$ $\mathbb{i}_z$方向

$-C_4 + C_3 = \mu_0 M_0$

対称性より $C_3 = -C_4$

$\therefore C_4 = -\frac{\mu_0 M_0}{2}$ $C_3 = \frac{\mu_0 M_0}{2}$

$\therefore B_z = \begin{cases} \frac{\mu_0 M_0}{2} & x<d \\ -\frac{\mu_0 M_0}{2} & x>d \end{cases}$



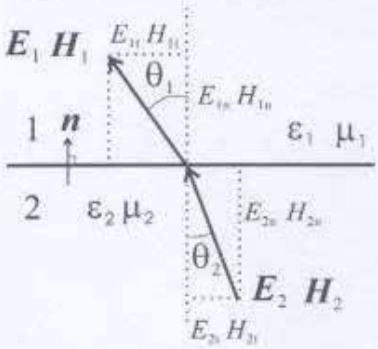
2つ合せて $\mathbb{B} = \mathbb{i}_z B_z = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \mathbb{i}_z\mu_0 M_0 & 0<x<d \\ 0 & x>d \end{cases}$

(iv) $\mathbb{H} = \mathbb{B}/\mu_0 - \mathbb{M}$ より

$0<x<d$ では $\mathbb{H} = \mathbb{i}_z\frac{\mu_0 M_0}{\mu_0} - \mathbb{i}_z M_0 = 0$

$x<0$, $x>d$ では $\mathbb{H} = 0 - 0 = 0$

（4）図のように，誘電率ε及び透磁率μの値が不連続的に変化する，二つの異なる線形，等方，均質な非導電性媒質の境界面上で成立する $\tan\theta_1 / \tan\theta_2$ の関係式を求めよ．この関係は屈折の法則(law of refraction)と呼ばれる．なお，非導電性媒質では一般的に面電荷密度$\xi = 0$ が成立する．（定常状態とする）



境界条件 $\mathbb{n}\times(\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2) = 0$ より $E_{1t} = E_{2t}$ —①

$\mathbb{n}\times(\mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_2) = \mathbb{K} = 0$ (∵非導電性) より $H_{1t} = H_{2t}$ —②

非導電性媒質では一般に $\xi = 0$

$\therefore \mathbb{n}\cdot(\varepsilon_1\mathbb{E}_1 - \varepsilon_2\mathbb{E}_2) = 0$ $\therefore \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ —③

又 $\mathbb{n}\cdot(\mu_1\mathbb{H}_1 - \mu_2\mathbb{H}_2) = 0$ $\therefore \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$ —④

$\therefore \tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}$ $\therefore \tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$

$\therefore \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}\cdot\frac{E_{2n}}{E_{2t}} \underset{①}{=} \frac{E_{2n}}{E_{1n}} \underset{③}{=} \frac{E_{2n}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

同様に

$\therefore \tan\theta_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$ $\tan\theta_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$

$\therefore \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}\frac{H_{2n}}{H_{2t}} \underset{②}{=} \frac{H_{2n}}{H_{1n}} \underset{④}{=} \frac{H_{2n}}{(\mu_2/\mu_1)H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$