| 電磁理論 IA&IB<br>ミニッツレポート B⑦ | 2011年7月6日 | 学籍番号 | | 氏名 | | 評点 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

（マクスウェル方程式の直接的適用（静電磁界））

真空中に半径 $a$ の円筒のシート状(厚さゼロ)の定常電流(表面電流密度 $\boldsymbol{K}$)が流れている. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{i}_z K$, であり, ここで, $K$ [A/m]は一定, $\boldsymbol{i}_z$ は $z$ 軸方向の基本ベクトルとする. 以下に答えよ.

（1）アンペア・マクスウェルの法則を表すマクスウェル方程式を記述せよ.

$$\nabla\times\mathbb{H}=\mathbb{J}+\frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}\quad\left(\begin{array}{l}\text{or }\nabla\times\mathbb{H}=\mathbb{J}+\dfrac{\partial\varepsilon_0\mathbb{E}}{\partial t}\\ \text{or }\nabla\times\dfrac{\mathbb{B}}{\mu_0}=\mathbb{J}+\dfrac{\partial\varepsilon_0\mathbb{E}}{\partial t}\end{array}\right)$$

（2）~~平板~~円筒内外の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求める為に解くべき微分方程式を上記の法則より導出せよ.

$$\nabla\times\mathbb{H}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ H_r & rH_\varphi & H_z\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\left[\hat{a}_r\left\{\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\right\}+r\hat{a}_\varphi\left\{\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right\}+\hat{a}_z\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right\}\right]$$

$$=\begin{cases}0 & (r<a)\\ \hat{a}_z K & (r=a)\\ 0 & (r>a)\end{cases}$$

$$\therefore\ \hat{a}_r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right\}+\hat{a}_\varphi\left\{\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right\}+\hat{a}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right\}=\begin{cases}0 & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

系の $z$ 軸対称性より $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$ および $z$ 方向無限長一様性より $\frac{\partial}{\partial z}=0$ と $H_z=0$

したがって $\mathbb{H}$ は $\varphi$ 成分 $H_\varphi$ のみより 解くべき微分方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)=\begin{cases}0 & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}\quad\text{—①}$$

（3）~~平板~~円筒内外の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求める為に使用する境界条件を表す一般的式を記述し, 本問題における境界条件を求めよ. 但し, 表面電流密度 $\boldsymbol{K}\neq 0$ である.

$$\mathbb{n}\times(\mathbb{H}_1-\mathbb{H}_2)=\mathbb{K}$$

本問題では境界に表面電流が存在するので $\mathbb{K}\neq 0$ より $\mathbb{n}\times(\mathbb{H}_1-\mathbb{H}_2)=\mathbb{K}\neq 0$

∴ 境界 $r=a$ で $\mathbb{H}$ の接線成分すなわち $H_\varphi$ は $\mathbb{K}=\hat{a}_z K$ の分不連続となり

$$H_{\varphi 1}-H_{\varphi 2}=K\quad\text{—②}$$

（4）（2）と（3）より磁界 $\boldsymbol{H}$ を求め, また $\boldsymbol{H}$ の大きさの分布を図示せよ.

① より $\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)=0$

$$\therefore\ rH_\varphi=\begin{cases}C_1 & r<a\\ C_2 & r>a\end{cases}$$

$$\therefore\ H_\varphi=\begin{cases}\dfrac{C_1}{r} & r<a\\ \dfrac{C_2}{r} & r>a\end{cases}$$

$r=0$ で $H_\varphi$ は有界より $C_1=0$

$$\therefore\ H_\varphi=\begin{cases}0 & r<a\\ \dfrac{C_2}{r} & r>a\end{cases}\quad ③$$

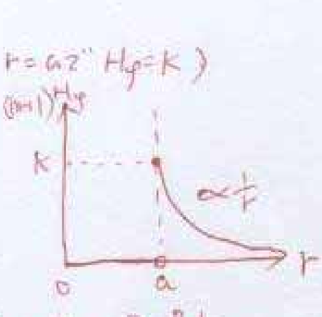
$r<a$ と $r>a$ の領域をそれぞれ #2, #1 とすると


② より $H_{\varphi 1}-H_{\varphi 2}=K$ より $r=a$ で ③ を適用すると

$$\frac{C_2}{a}-0=K\quad\therefore\ C_2=aK$$

$$\therefore\ H_\varphi=\begin{cases}0 & r<a\\ \dfrac{aK}{r} & r\geq a\end{cases}\quad(r=a\text{ で }H_\varphi=K)$$

$$\therefore\ \mathbb{H}=\begin{cases}0 & r<a\\ \hat{a}_\varphi\dfrac{aK}{r} & r\geq a\end{cases}$$




c.f.
トータル電流 $I=\int_S \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}dS$　　$\mathbb{J}=\hat{a}_z K$

$\mathbb{n}dS=d\mathbb{S}_z=d\mathbb{l}_r\times d\mathbb{l}_\varphi=\hat{a}_z r dr d\varphi$

今 $r=a$ のみに $K$ が及ぶので $\mathbb{n}dS=a\hat{a}_z d\varphi$

$$\therefore\ I=\int_0^{2\pi}\hat{a}_z K\cdot a\hat{a}_z d\varphi=2\pi aK$$

$$\therefore\ K=\frac{I}{2\pi a}\quad\therefore\ \mathbb{H}=\begin{cases}0 & (r<a)\\ \hat{a}_\varphi\dfrac{I}{2\pi r} & (r\geq a)\end{cases}$$

…… $r\geq a$ では $z$ 軸上に $I$ の線電流による磁界と同様になる.