

(マクスウェル方程式の直接的適用 (静電磁界))

真空中に電荷密度 $\rho(r) = \rho_0 r$ で分布した半径 a の球状静止電荷分布がある。 $r = a$ での表面電荷密度 $\xi = 0$ とする。以下に答えよ。

(1) 電束に関するガウスの法則を表すマクスウェル方程式を記述せよ。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$(\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho)$$

(2) 球内外の電界 $\mathbf{E}$ を求める為に解くべき微分方程式を上記の法則より導出せよ。

球中心を原点とする球座標系 (r, θ, φ) を用いると $(h_r, h_\theta, h_\varphi) = (1, r, r \sin \theta)$ より

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (\epsilon_0 E_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (\epsilon_0 E_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\epsilon_0 E_\varphi r)}{\partial \varphi} \right] = \begin{cases} \rho_0 r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \epsilon_0 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\epsilon_0 E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\epsilon_0 E_\varphi)}{\partial \varphi} = \begin{cases} \rho_0 r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

系は球対称であるから $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ であり $\mathbf{E}$ は r 方向成分 E_r のみ

$\therefore$ 解くべき微分方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \epsilon_0 E_r) = \begin{cases} \rho_0 r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad \left(\text{or} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \right)$$

(3) 球内外の電界 $\mathbf{E}$ を求める為に使用する境界条件を表す一般的な式を記述し、本問題における境界条件を求めよ。但し、表面電荷密度 $\xi = 0$ である。

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \xi = 0 \quad (\text{or} \quad \mathbf{n} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_2) = \xi = 0)$$

本問題では境界に表面電荷が存在していないので $\xi = 0$

$$\therefore \mathbf{n} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$\therefore r = a$ で $\mathbf{E}$ の法線成分すなわち E_r は連続

(4) (2) と (3) より電界 $\mathbf{E}$ を求め、また $\mathbf{E}$ の大きさの半径方向分布を図示せよ。

① より

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \epsilon_0 E_r) = \begin{cases} \rho_0 r^3 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

② より 境界条件 $\mathbf{n} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_2) = 0$ より

$r = a$ で $\mathbf{E}$ の法線成分すなわち E_r は連続だから

$$E_r(r=a) = \frac{\rho_0 a^2}{4 \epsilon_0} = \frac{C_2}{\epsilon_0 a^2} \quad \therefore C_2 = \frac{\rho_0 a^4}{4}$$

$$\therefore r^2 \epsilon_0 E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^4}{4} + C_1 & (r < a) \\ C_2 & (r > a) \end{cases}$$

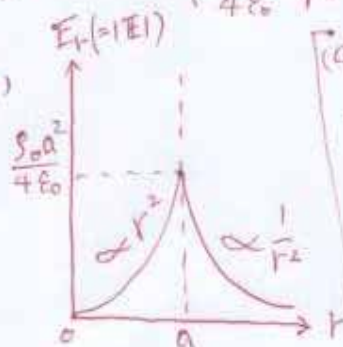
$$\therefore E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4 \epsilon_0} r^2 & (r < a) \\ \frac{\rho_0 a^4}{4 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} & (r \geq a) \end{cases} \quad \therefore \mathbf{E} = \begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_r \frac{\rho_0 r^2}{4 \epsilon_0} & (r < a) \\ \hat{\mathbf{r}}_r \frac{\rho_0 a^4}{4 \epsilon_0 r^2} & (r \geq a) \end{cases}$$

$$\therefore E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4 \epsilon_0} + \frac{C_1}{\epsilon_0 r^2} & (r < a) \\ \frac{C_2}{\epsilon_0 r^2} & (r > a) \end{cases}$$

$r = 0$ で E_r は有限より $C_1 = 0$

$$\therefore E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4 \epsilon_0} & r < a \\ \frac{C_2}{\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

$r < a$ と $r > a$ の領域を #2, #1 とする



(c.f.) 全電荷 $Q = \int_V \rho dV = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 r \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

$$\therefore Q = \rho_0 \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \rho_0 \frac{1}{4} a^4 4\pi$$

$$\therefore \rho_0 = \frac{Q}{\pi a^4}$$

$$\therefore \mathbf{E} = \begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_r \frac{Q r^2}{4 \pi \epsilon_0 a^4} & (r < a) \\ \hat{\mathbf{r}}_r \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & (r \geq a) \end{cases}$$

※ E_r に Q が含まれるように書き直すと、 $r < a$ のとき $E_r \propto r^2$ 、 $r > a$ のとき $E_r \propto 1/r^2$ と同じ