電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑤	2011年 6月 22日	学籍番号		氏名		評点	

（1）マクスウェル方程式の中で，アンペア・マクスウェルの法則について以下に答えよ．

（1－1）積分形から微分形を導け．

$$\oint_C \mathbb{H}\cdot d\mathbb{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \mathbb{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\, dS \quad \left(\mathbb{H}=\frac{\mathbb{B}}{\mu_0},\ \mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E} \text{ でも可}\right)$$

ストークスの定理より

$$\oint_C \mathbb{H}\cdot d\mathbb{l} = \int_S \nabla\times\mathbb{H}\cdot\mathbb{n}\, dS = \int_S \mathbb{J}\cdot\mathbb{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\, dS$$

$$\therefore (\nabla\times\mathbb{H})\cdot\mathbb{n} = \mathbb{J}\cdot\mathbb{n} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{D}\cdot\mathbb{n}) \qquad \therefore \nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}$$

（1－2）上記の微分形を静磁界で，かつ直角座標(x, y, z)系に適用するとき，解くべき微分方程式を記述せよ．

$$\nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{J} \ (\because \text{静磁界}) \quad (\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0\mathbb{J} \text{ でも可})$$

$$\therefore \mathbb{i}_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \mathbb{i}_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \mathbb{i}_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = \mathbb{i}_x J_x + \mathbb{i}_y J_y + \mathbb{i}_z J_z$$

$$\left(\text{or } \mathbb{i}_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \mathbb{i}_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \mathbb{i}_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mathbb{i}_x\mu_0 J_x + \mathbb{i}_y\mu_0 J_y + \mathbb{i}_z\mu_0 J_z \text{ でも可}\right)$$

（1－3）同様に円柱座標(r, φ, z)系の場合に適用するとき，解くべき微分方程式を記述せよ．

$$\nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J} \quad (\text{or } \nabla\times\mathbb{B} = \mu_0\mathbb{J})$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbb{i}_r & r\mathbb{i}_\varphi & \mathbb{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\mathbb{i}_r\left\{\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\right\} + r\mathbb{i}_\varphi\left\{\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right\} + \mathbb{i}_z\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right\}\right]$$

$$= \mathbb{i}_r J_r + \mathbb{i}_\varphi J_\varphi + \mathbb{i}_z J_z$$

$$\therefore \mathbb{i}_r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right\} + \mathbb{i}_\varphi\left\{\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right\} + \mathbb{i}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right\} = \mathbb{i}_r J_r + \mathbb{i}_\varphi J_\varphi + \mathbb{i}_z J_z$$

$$\left(\text{or } \mathbb{i}_r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right\} + \mathbb{i}_\varphi\left\{\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right\} + \mathbb{i}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right\} = \mathbb{i}_r\mu_0 J_r + \mathbb{i}_\varphi\mu_0 J_\varphi + \mathbb{i}_z\mu_0 J_z \text{ でも可}\right)$$

（2）マクスウェル方程式の中で，電束に関するガウスの法則について以下に答えよ．

（2－1）積分形から微分形を導け．

$$\oint_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\, dS = \int_V \rho\, dV \quad (\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E} \text{ でも可})$$

ガウスの発散定理より

$$\oint_S \mathbb{D}\cdot\mathbb{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot\mathbb{D}\, dV = \int_V \rho\, dV \qquad \therefore \nabla\cdot\mathbb{D} = \rho$$

（2－2）上記の微分形を円柱座標(r, φ, z)系の場合に適用するとき，解くべき微分方程式を記述せよ．

$$\nabla\cdot\mathbb{D} = \rho \qquad \therefore \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\varepsilon_0 E_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_z r)}{\partial z}\right] = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_0 E_r r) + \frac{1}{r}\frac{\partial(\varepsilon_0 E_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_z)}{\partial z} = \rho$$

$$\left(\text{or } \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

（2－3）同様に球座標(r, θ, φ)系の場合に適用するとき，解くべき微分方程式を記述せよ．

$$\nabla\cdot\mathbb{D} = \rho \qquad \therefore \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(\varepsilon_0 E_r r^2\sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_\varphi r)}{\partial\varphi}\right] = \rho$$

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_0 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\varepsilon_0 E_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\varepsilon_0 E_\varphi) = \rho$$

$$\left(\text{or } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$