電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B②	2011 年 6 月 8 日	学籍番号		氏名		評点	

（真空中の電磁界基本法則 I）

（1） 半径 a の円柱状一様な定常電流(電流密度 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{i}_z J$)が軸方向に流れている. 以下に答えよ.

1.1 アンペアの周回積分の法則(積分形)を記述せよ.

$$\oint_C \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}\,dS \quad \left(\oint_C \mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}\,dS \text{ でも可} \right)$$

1.2 1.1 の法則を用いて円柱内外の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ. また $|\boldsymbol{B}|$ のr方向分布を図示せよ

z軸方向無限長の定常電流 $\mathbb{J} = \mathring{i}_z J$ で円柱対称な系ゆえに $\mathbb{B}$ はφ方向成分 B_φ のみで

r が同じなら B_φ は一定. ∴ $\mathbb{B} = \mathring{i}_\varphi B_\varphi$, $d\boldsymbol{l} = \mathring{i}_\varphi h_\varphi d\varphi = \mathring{i}_\varphi r\,d\varphi$, $\boldsymbol{n} = \mathring{i}_z$, $\boldsymbol{n}\,dS = d\boldsymbol{S}_z = d\boldsymbol{l}_r \times d\boldsymbol{l}_\varphi = \mathring{i}_z r\,dr\,d\varphi$ より

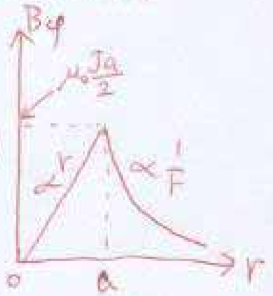
1.1の法則において半径rの周回を考えて $\mathbb{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathring{i}_\varphi B_\varphi \cdot \mathring{i}_\varphi r\,d\varphi = B_\varphi r\,d\varphi$, $\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \mathring{i}_z J\cdot \mathring{i}_z r\,dr\,d\varphi = J r\,dr\,d\varphi$

左辺 $= \oint_C \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0} B_\varphi r\,d\varphi = \frac{1}{\mu_0} B_\varphi r[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi r B_\varphi}{\mu_0}$

右辺は $r<a$ のとき $\int_S \mathbb{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^r J r\,dr\,d\varphi = J\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi} = J\cdot\frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi = \pi r^2 J$

$r \geq a$ のとき $\int_S \mathbb{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^a J r\,dr\,d\varphi = J\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a[\varphi]_0^{2\pi} = J\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot 2\pi = \pi a^2 J$

$$\therefore \frac{2\pi r B_\varphi}{\mu_0} = \begin{cases} \pi r^2 J & (r<a) \\ \pi a^2 J & (r\geq a) \end{cases} \quad \therefore B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 \frac{Jr}{2} & (r<a) \\ \mu_0 \frac{Ja^2}{2r} & (r\geq a) \end{cases} \quad \therefore \mathbb{B} = \begin{cases} \mathring{i}_\varphi \mu_0 \frac{Jr}{2} & (r<a) \\ \mathring{i}_\varphi \mu_0 \frac{Ja^2}{2r} & (r\geq a) \end{cases}$$



1.3 全電流 I とするとき, I を用いて $\boldsymbol{B}$ を表せ.

$I = \pi a^2 J \quad \therefore J = \frac{I}{\pi a^2}$

$$\therefore \mathbb{B} = \begin{cases} \mathring{i}_\varphi \mu_0 \frac{I}{2\pi a^2} r & r\leq a \\ \mathring{i}_\varphi \mu_0 \frac{I}{2\pi r} & r\geq a \end{cases}$$ （r=0 に I の線電流がある場合と等価）

（2） 半径 a のシート状(厚さゼロ)円筒静止電荷分布(面電荷密度 σ[C/m²])がある. 次に答えよ.

2.1 電束に関するガウスの法則(積分形)を記述せよ. 電荷密度 ρ[C/m³]を用いて表現せよ.

$$\oint_S \mathbb{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho\,dV \quad \left(\oint_S \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho\,dV \text{ でも可} \right)$$

2.2 上記の法則を用いて円筒内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ. また $|\boldsymbol{E}|$ の r 方向分布を図示せよ. 但し, σ[C/m²]を使用せよ.

z軸方向無限長で円柱対称より電界EはR成分 E_r のみでかつrが同じなら値は同じ

∴ $\mathbb{D} = \mathring{i}_r \varepsilon_0 E_r(r)$, $\boldsymbol{n}\,dS = d\boldsymbol{S}_r = d\boldsymbol{l}_\varphi \times d\boldsymbol{l}_z = \mathring{i}_r r\,d\varphi\,dz$ 又 $dV = d\boldsymbol{l}_r\cdot(d\boldsymbol{l}_\varphi \times d\boldsymbol{l}_z) = r\,dr\,d\varphi\,dz$

2.1の法則より半径rの円柱（z方向長さ1）を考えて $\mathbb{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \mathring{i}_r \varepsilon_0 E_r(r)\cdot\mathring{i}_r r\,d\varphi\,dz = \varepsilon_0 r E_r(r)\,d\varphi\,dz$

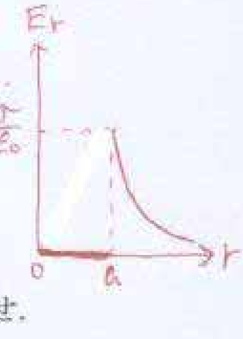
左辺 $= \int_0^1\int_0^{2\pi} \varepsilon_0 r E_r(r)\,d\varphi\,dz = \varepsilon_0 r E_r(r)[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = 2\pi r \varepsilon_0 E_r(r)$

右辺において 電荷は r=a にしか存在していないので $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$ は $a\,d\varphi\,dz$ となる.

$r<a$ において 右辺 $= \int_0^1\int_0^{2\pi} 0\,a\,d\varphi\,dz = 0$

$r\geq a$ において 右辺 $= \int_0^1\int_0^{2\pi} \sigma a\,d\varphi\,dz = \sigma a[\varphi]_0^{2\pi}[z]_0^1 = 2\pi\sigma a$

$$\therefore 2\pi r\varepsilon_0 E_r(r) = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ 2\pi\sigma a & (r\geq a) \end{cases} \quad \therefore E_r(r) = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} & (r\geq a) \end{cases} \quad \therefore \mathbb{E} = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ \mathring{i}_r \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} & (r\geq a) \end{cases}$$



2.3 z 軸方向単位長さ当りの全電荷を q とするとき, q を用いて $\boldsymbol{E}$ を表せ.

$q = 2\pi a\cdot 1\cdot\sigma = 2\pi\sigma a \quad \therefore \sigma = \frac{q}{2\pi a}$

$$\therefore \mathbb{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \mathring{i}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} & r\geq a \end{cases}$$ （r=0 に単位長さ当りの電荷 q が存在するときと等価）

（3） 電荷保存の法則(積分形)を記述せよ.

$$\oint_S \mathbb{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV$$