

(荷電粒子の運動)

均一な静電磁界の電界 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B} (= \mathbf{i}_z B)$ 中に質量 m の点電荷 $q (> 0)$ が一定速度 $\mathbf{v}$ で入射するとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z$ とする。

(1) 点電荷に加わるローレンツ力 $\mathbf{F}$ を $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, q$ で示せ。必ずベクトル表記とすること。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

(2) 点電荷の運動方程式を記述せよ。必ずベクトル表記すること。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

(3) $\mathbf{E} = 0$ のとき、点電荷の運動を決定する微分方程式を x, y, z について求めよ。

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{q}{m} v_y B \\ \dot{v}_y = -\frac{q}{m} v_x B \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad \text{か} \quad \begin{cases} \dot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0 \\ \dot{v}_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

(4) 初期条件として $t=0$ で $v_x = v \sin \theta$, $v_y = 0$, $v_z = v \cos \theta$, を与えると、 $t=0$ での v_x' 及び v_y' はいくらになるか (これは、単なる初期条件である)。

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = -\frac{q v B}{m} \sin \theta \end{cases}$$

(5) $\omega_c = \frac{qB}{m}$ とおく。この物理量を一般に何というか。

$$\text{サイクロトロンの角速度}$$

(6) (3) の微分方程式を解き v_x, v_y, v_z と x, y, z を求めよ。ただし、(4)、(5) に加えて $t=0$ で、 $x=0$, $y=0$, $z=0$ とする。

$$\text{①, ② より} \quad \begin{cases} v_x = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \\ v_y = C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$t=0 \text{ 時 } v_x = v \sin \theta, v_y = 0 \text{ より}$$

$$A = v \sin \theta, C = 0$$

$$\begin{cases} v_x = v \sin \theta \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \\ v_y = D \sin \omega_c t \end{cases}$$