電磁理論 IA & IB (Aクラス) ミニッツレポート④	2011年5月11日	学籍番号		氏名		評点	

(直交座標系における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ のベクトル公式)『教科書及びノートは見ないこと』

基本ベクトル $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, 測度係数 h_1, h_2, h_3 である直交座標系 (u_1, u_2, u_3) におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散は，$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \dfrac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$ であらわされる．円柱座標系及び球座標系ではそれぞれどのように表されるか. なお、計算は省略しないこと。

10

(１) 円柱座標系：$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(A_r\cdot r)}{\partial r} + \dfrac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial(A_z r)}{\partial z}\right)$

$= \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

(２) 球座標系　：$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(A_r\cdot r^2\sin\theta) + \dfrac{\partial(A_\theta r\sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{\partial(A_\varphi\cdot r)}{\partial\varphi}\right)$

$= \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

(球座標系(r,θ,φ)における flux の計算)

原点 O を中心とし，半径 r の球面 S を貫いて外方に出て行くベクトル界 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_r r^2$ の力線の束(flux)，すなわち総線束；$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を以下のように求める．ここで，球座標系(r,θ,φ)の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta, \boldsymbol{i}_\varphi$ とし，$\boldsymbol{n}$ は球の表面に垂直で外方向を向く単位ベクトルである．以下の問に答えよ．

10

(３) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．

$A\cdot n\,dS = \hat{e}_r\cdot r^2\cdot\hat{e}_r\cdot dl_\theta\, dl_\varphi$

$= r^2\cdot r\cdot r\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$

$= r^4\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

20

(４)(３) を用いて半径 a の球面を貫く力線 $\boldsymbol{A}$ の総線束 Φ を求めよ．

$\Phi = \oint_S A\cdot n\,dS = \int a^4\sin\theta\, d\varphi = 4\pi a^4$

30

(５) ガウスの発散定理を用いて計算して（４）の結果と一致することを示せ．

$\nabla\cdot A = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot r^2) = 4r$

30

よって

$\Phi = \oint_S A\cdot n\,ds = \int_V \nabla\cdot A\,dv$

$= \int_V 4r\cdot r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$

$= [r^4]_0^a\,[-\cos\theta]_0^\pi\,[\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi a^4$

で一致する。