電磁理論 IA & IB (Aクラス) ミニッツレポート②	2011年4月20日	学籍番号		氏名		評点	

（1）直角座標系(x, y, z)の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ とするとき以下を計算せよ．

$\boldsymbol{i}_y \cdot \boldsymbol{i}_x = 0$　　　　$\boldsymbol{i}_x \times \boldsymbol{i}_z = -\boldsymbol{i}_y$

$\boldsymbol{i}_y \times \boldsymbol{i}_y = 0$　　　　$\boldsymbol{i}_x \cdot \boldsymbol{i}_x = 1$

（2）次のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のスカラー積（内積）$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}$ 及びベクトル積（外積）$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ を計算過程の省略なしに求めよ．

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_x - 2\boldsymbol{i}_y - 3\boldsymbol{i}_z,\quad \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i}_x + 2\boldsymbol{i}_y - 1\boldsymbol{i}_z$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = (3\boldsymbol{i}_x + 2\boldsymbol{i}_y - \boldsymbol{i}_z)(\boldsymbol{i}_x - 2\boldsymbol{i}_y - 3\boldsymbol{i}_z) = 3\cdot 1 + 2(-2) + (-1)(-3) = 2$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} = (3\boldsymbol{i}_x + 2\boldsymbol{i}_y - \boldsymbol{i}_z)(3\boldsymbol{i}_x + 2\boldsymbol{i}_y - \boldsymbol{i}_z) = 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-1)(-1) = 14$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_x \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{i}_y \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{i}_z \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}_x(-6-2) - \boldsymbol{i}_y(-9+1) + \boldsymbol{i}_z(-6-2) = -8\boldsymbol{i}_x + 8\boldsymbol{i}_y - 8\boldsymbol{i}_z$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_x \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{i}_y \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{i}_z \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

（3）$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$とする．$\boldsymbol{G}$ の z 成分 G_z を $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の成分(A_x, A_y, A_z など)で書き表し，$G_z = [(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}]_z$ あることを示せ．但し計算過程を省略しないこと．

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{i}_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{i}_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$G_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)$$

$$= B_z(A_xC_x + A_yC_y) - C_z(A_xB_x + A_yB_y)$$

$$= B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

$$= B_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$= [(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}]_z \quad //$$

（4）上の結果を用い、ベクトル三重積では、結合の法則が成立しないことを示せ。

(3)の結果より明らかに $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$（ベクトル三重積の公式）—①

一方，

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$= -((\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B})$$

$$= -(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \quad \text{—②}$$

①と②は異なるので

結合の法則は成立しない。