2009 7/16 draft-1p 1/3

電磁理論IB（Aクラス） 期末試験 1/3	2009年7月24日	学籍番号		氏名		評点	

1. 真空中に一様電荷密度 ρで満たされた半径 a の円柱状の無限長静止電荷分布がある．表面電荷密度 $\xi=0$ とする．以下に答えよ．

(1-1) 電束に関するガウスの法則(積分形)を記述し，その物理的意味を記述せよ．

$\oint_S \mathbb{D}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int_V \rho\, dV$ (or $\oint_S \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int_V \rho\, dV$) 5

空間の任意の閉曲面Sを通ってその領域Vから外方に出ていく正味の電束（左辺）は領域V内に含まれる正味の(正)電荷量(右辺)に等しい。

(1-2) 電束に関するガウスの法則を示す積分形の方程式から微分形を導け．

電束に関するガウスの法則を示す積分形は

$\oint_S \mathbb{D}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int_V \rho\, dV$ (or $\oint_S \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int_V \rho\, dV$) 5

ガウスの発散定理より

$\oint_S \mathbb{D}\cdot \mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\mathbb{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$ $\therefore \nabla\cdot\mathbb{D} = \rho$ (or $\nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \rho$)

(1-3) 上記のマクスウェル方程式(微分形)を用いて円柱内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めるとき，解くべき微分方程式と境界条件を求めよ． $\nabla\cdot\mathbb{D}=\rho \quad \therefore \nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E}=\rho$

円柱座標系(r, φ, z)において

$$\nabla\cdot\varepsilon_0\mathbb{E} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\varepsilon_0 E_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_z r)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_0 E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial(\varepsilon_0 E_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\varepsilon_0 E_z)}{\partial z} = \begin{cases}\rho & (r<a)\\ 0 & (r\geq a)\end{cases}$$

系の対称性より $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$ z方向無限長一様より $\frac{\partial}{\partial z}=0$ $\mathbb{E}$はr方向成分E_rのみ ∴解くべき微分方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_0 E_r) = \begin{cases}\rho & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

$r=a$の境界面に表面電荷密度$\xi=0$で存在しないので

境界条件 $\mathbf{n}\cdot(\mathbb{D}_1-\mathbb{D}_2) = \mathbf{n}\cdot(\varepsilon_0\mathbb{E}_1-\varepsilon_0\mathbb{E}_2) = \xi = 0$

∴ $\mathbb{E}$の法線成分すなわちE_rは$r=a$で連続。 10

(1-4) (1-3)より円柱内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．また $|\boldsymbol{E}|$ の半径方向の分布を図示せよ．尚，積分形から求めても良い．

i) $r<a$の場合

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_0 E_r) = \rho$ $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

$\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_0 E_r) = \rho r$ $\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}r\right)$

$\therefore r\varepsilon_0 E_r = \frac{1}{2}\rho r^2 + C_1$ $\left(rE_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r^2 + C_1\right)$

$\therefore E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r + \frac{C_1}{\varepsilon r}$ ① $\left(E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r + \frac{C_1}{r}\right)$ ①'

$r=0$でE_rは有界より $C_1=0$

$\therefore E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r$ —②

ii) $r>a$の場合

$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_0 E_r)\right) = 0 \quad \therefore \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0$

$\therefore \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0 \quad \therefore rE_r = C_2$

$\therefore E_r = \frac{C_2}{r}$ —③

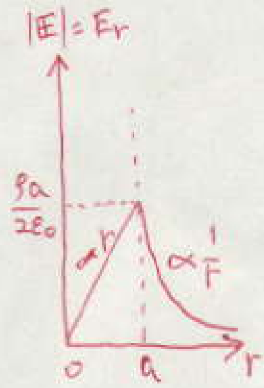
②③に(1-3)の境界条件を適用して

$E_r(r=a) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a = \frac{C_2}{a}$ 15

$\therefore C_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ —④

$$\therefore E_r = \begin{cases}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r & r<a\\ \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r\geq a\end{cases}$$

$$\therefore \mathbb{E} = \begin{cases}\mathbf{i}_r\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r & (r<a)\\ \mathbf{i}_r\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} & (r\geq a)\end{cases}$$



35

/

(1-4) 別解：積分形を用いる方法　z方向単位長さ1を考えて

$$\oint_S \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot \mathbb{n} dS = \int_V \rho \, dV$$

$$\mathbb{n} dS = d\mathbb{S}_r = d\mathbb{l}_\varphi \times d\mathbb{l}_z = \mathring{\mathbb{i}}_\varphi r d\varphi \times \mathring{\mathbb{i}}_z dz = \mathring{\mathbb{i}}_\varphi \times \mathring{\mathbb{i}}_z r d\varphi dz = \mathring{\mathbb{i}}_r r d\varphi dz$$

$$dV = d\mathbb{l}_r \cdot (d\mathbb{l}_\varphi \times d\mathbb{l}_z) = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot \mathring{\mathbb{i}}_r r d\varphi dz = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r \rho\, r\,dr\,d\varphi\,dz & r<a \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^a \rho\, r\,dr\,d\varphi\,dz & r>a \end{cases}$$

円柱対称性より

$\mathbb{E}$ は r 方向成分 E_r のみで $\mathbb{E} = \mathring{\mathbb{i}}_r E_r$

$$\varepsilon_0 E_r r [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 = \begin{cases} \rho \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 & (r<a) \\ \rho \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 & (r \geq a) \end{cases}$$

$$\therefore \varepsilon_0 E_r 2\pi r = \begin{cases} \rho \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi \cdot 1 & r<a \\ \rho \frac{1}{2} a^2\, 2\pi \cdot 1 & r \geq a \end{cases}$$

$$\therefore E_r = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & r<a \\ \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r \geq a \end{cases} \quad \therefore \mathbb{E} = \begin{cases} \mathring{\mathbb{i}}_r \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & r<a \\ \mathring{\mathbb{i}}_r \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r \geq a \end{cases}$$

（参）単位長さ当りの全電荷：$q = \pi a^2 \rho \cdot 1 \quad \therefore \rho = \frac{q}{\pi a^2}$

$$\therefore E_r = \begin{cases} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} r & (r<a) \\ \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r \geq a) \end{cases}$$

電磁理論 IB（Aクラス）期末試験 2/3	2009年7月24日	学籍番号		氏名		評点	

2. 真空中に半径 a の円筒のシート状(厚さゼロ)の定常電流(表面電流密度 $\boldsymbol{K}$)が流れている．$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{i}_z K$，であり，ここで，$K$ [A/m]は一定，$\boldsymbol{i}_z$ は z 軸方向の基本ベクトルとする．以下に答えよ．

(2-1) アンペア・マクスウェルの法則(積分形)を記述し，その物理的意味を記述せよ． 5

$$\oint_c \mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbb{D}\cdot \boldsymbol{n}dS \quad \left(\text{or } \oint_c \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}dS + \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0\mathbb{E}\cdot \boldsymbol{n}dS\right)$$

空間の任意の閉曲線(周回)cを積分路として磁界$\mathbb{H}$ $(=\mathbb{B}/\mu_0)$の接線成分$\mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l}$の周回積分すなわち起磁力(循環)の大きさ(左辺)は，その閉曲線c(周回c)を周辺とする面S ($\mathbb{H}$は$d\boldsymbol{l}$と右ネジの関係にある面Sの法線ベクトル)と正味鎖交する導電電流と変位電流(電束密度の時間変化)に等しい．

(2-3) アンペア・マクスウェルの法則を示す積分形の方程式から微分形を導け． 5

アンペア・マクスウェルの法則を示す積分形は

$$\oint_c \mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbb{D}\cdot \boldsymbol{n}dS \quad \left(\text{or } \oint_c \frac{\mathbb{B}}{\mu_0}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}dS + \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0\mathbb{E}\cdot \boldsymbol{n}dS\right)$$

ストークスの定理より

$$\oint_c \mathbb{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\mathbb{H}\cdot \boldsymbol{n}dS = \int_S \mathbb{J}\cdot \boldsymbol{n}dS + \frac{d}{dt}\int_S \mathbb{D}\cdot \boldsymbol{n}dS$$

$$\therefore \nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t} \quad \left(\text{or } \nabla\times\frac{\mathbb{B}}{\mu_0} = \mathbb{J} + \frac{\partial \varepsilon_0\mathbb{E}}{\partial t}\right)$$

(2-3) 上記のマクスウェル方程式(微分形)を用いて円柱内外の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めるとき，解くべき微分方程式と境界条件を求めよ． 10

定常電流より $\nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{J}$ 円柱座標系 (r, φ, z) より

$$\nabla\times\mathbb{H} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{a}_r\left\{\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}\right\} + r\boldsymbol{a}_\varphi\left\{\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right\} + \boldsymbol{a}_z\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right\}\right]$$

$$= \boldsymbol{a}_r\left\{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}} - \cancel{\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}}\right\} + \boldsymbol{a}_\varphi\left\{\cancel{\frac{\partial H_r}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial r}}\right\} + \boldsymbol{a}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}}\right\} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \boldsymbol{a}_z K & r=a \\ 0 & r>a \end{cases}$$

系のz軸対称性より $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$，z軸方向無限長の一様性から $\frac{\partial}{\partial z}=0$，$\mathbb{H}$は$\varphi$成分$H_\varphi$のみより

解くべき微分方程式は $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = \begin{cases} 0 & r<a \\ K & r=a \\ 0 & r>a \end{cases}$

$r=a$で表面電流密度 $\mathbb{K} = \boldsymbol{a}_z K$ より境界条件は

$$\underset{(\boldsymbol{a}_r)}{\boldsymbol{n}}\times(\mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_2) = \mathbb{K} \neq 0$$ より $r=a$で$\mathbb{H}$の接線成分すなわちH_φはKの分不連続。

$\boldsymbol{a}_z$ | #1, $\to \boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_r$ $\therefore H_{1t} - H_{2t} = K$ $\quad (\therefore H_{\varphi 1} - H_{\varphi 2} = K)$

(2-4) (2-3)より円柱内外の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．また $|\boldsymbol{H}|$ の半径方向の分布を図示せよ．尚，積分形から求めても良い． 15

i) $r<a$の場合(#2)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0$$
$$rH_\varphi = C_1$$
$$H_\varphi = \frac{C_1}{r}$$

$r=0$でH_φは有界より $C_1 = 0$

$$\therefore H_\varphi = 0 \quad \text{—①}$$

ii) $r>a$の場合(#1)

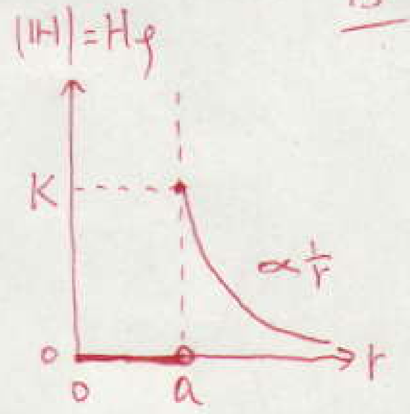
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0$$
$$rH_\varphi = C_2$$
$$\therefore H_\varphi = \frac{C_2}{r} \quad \text{—②}$$

①②に(2-3)の境界条件を適用して

$$H_\varphi(r=a) = \frac{C_2}{a} - 0 = K$$
$$\therefore C_2 = aK \quad \text{—③}$$
$$\therefore H_\varphi = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{aK}{r} & r\geq a \end{cases}$$

$$\therefore \mathbb{H} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_\varphi 0 \ (\text{or } \overset{\text{ゼロベクトル}}{\boldsymbol{0}}) & r<a \\ \boldsymbol{a}_\varphi \frac{aK}{r} & r\geq a \end{cases}$$

$$\left(\mathbb{B} = \mu_0\mathbb{H} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 aK}{r} & r\geq a \end{cases}\right)$$

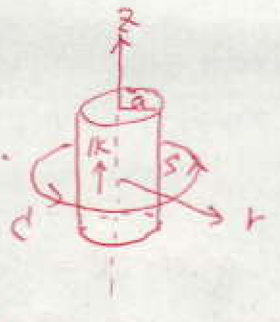


35

(2-4) 別解：積分形を用いた方法

$$\oint_c \mathbb{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbb{J}\cdot \mathbf{n}\,dS + \frac{d}{dt}\int_s \mathbb{D}\cdot \mathbf{n}\,dS$$

$\mathbb{K} = \hat{i}_z K$.



z軸対称性とz軸方向無限長で一様より

$\mathbb{H}$はφ方向成分H_φのみを持つ。$\therefore \mathbb{H} = \hat{i}_\varphi H_\varphi$

$d\mathbf{l}_\varphi = \hat{i}_\varphi r\,d\varphi$, $\mathbf{n}\,dS = dS_z = d\mathbf{l}_r \times d\mathbf{l}_\varphi = \hat{i}_r dr \times \hat{i}_\varphi r\,d\varphi = \hat{i}_z r\,dr\,d\varphi$

$$\therefore \int_0^{2\pi} H_\varphi r\,d\varphi = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{r} 0\, r\,dr\,d\varphi = 0 & r<a \\ \int_0^{2\pi} Ka\,d\varphi & r>a \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{i}_\varphi H_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi r\,d\varphi = \begin{cases} 0 \\ \int_0^{2\pi} \hat{i}_z K \cdot \hat{i}_z a\,d\varphi \end{cases}$$

$$H_\varphi r [\varphi]_0^{2\pi} = \begin{cases} 0 & r<a \\ Ka[\varphi]_0^{2\pi} & r\geq a \end{cases}$$

$$\therefore H_\varphi = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{Ka}{r} & r\geq a \end{cases} \quad \therefore \mathbb{H}_\varphi = \begin{cases} 0 & r<a \\ \hat{i}_\varphi \frac{Ka}{r} & r\geq a \end{cases}$$

(参) 全電流をIとすると $I = 2\pi a K$ $\therefore K = \frac{I}{2\pi a}$

$$\therefore \mathbb{H} = \begin{cases} 0 & (r<a) \\ \hat{i}_\varphi \frac{I}{2\pi r} & (r\geq a) \end{cases}$$

電磁理論IB（Aクラス）期末試験 3/3	2009年7月24日	学籍番号		氏名		評点	

3.次の問いに答えよ.

30

(3-1) シリコン(Si)内部にイオン注入によって電荷が注入されたとする．オームの法則 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ が成立するとき，電流電荷の保存則とマクスウェル方程式から電荷密度ρの時間発展を表す式と緩和時間τを示す一般的な式を導出し，τの値を求めよ． 但し，$t=0$ で$\rho=\rho_0$ とし，真空中の誘電率は$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ [F/m]，シリコンの比誘電率$\varepsilon_r=12$，電気伝導率$\sigma=2.52\times10^{-4}$ [$m^{-1}\Omega^{-1}$]とする．数値は有効数字2桁まで記すこと．

電流電荷保存則より

$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ —①

オームの法則 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ を代入して

$\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ —②

電束に関するガウスの法則 $\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\rho$ より

$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$ —③

③を②へ代入して

$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$\therefore \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0$

$\therefore \frac{\partial\rho}{\rho}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\partial t$

$\therefore \ln\rho=-\frac{\sigma}{\varepsilon}t+C$

$\therefore \rho=e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t+C_1}$

$=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ ($\because t=0$で$\rho=\rho_0$)

$\therefore \rho=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\sigma}$

$\therefore \tau=\frac{12\times8.85\times10^{-12}}{2.52\times10^{-4}}$

$=4.21\times10^{-7}$

$=4.2\times10^{-7}$ [sec]

7

(3-2) 電荷と電流が存在しない（$\rho=0,\boldsymbol{J}=0$）の真空中の空間において伝播する電磁波のベクトル波動方程式を真空中のマクスウェル方程式から導出せよ．

$\rho=0,\ \boldsymbol{J}=0$ の真空中におけるマクスウェル方程式は

① $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$

② $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

③ $\nabla\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}=0$

④ $\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}=0$

①の両辺の$\nabla\times$をとりベクトル公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$ と③②を用いて 左辺 $=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\underbrace{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}}_{0(\because③)}-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$ ※

※ 右辺 $=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\times\boldsymbol{H})}_{②より}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$

$\therefore \nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$

同様にして②の両辺の$\nabla\times$をとりベクトル公式と①④を用いて

左辺 $=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}=\underbrace{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{H}}_{0(\because④)}-\nabla^2\boldsymbol{H}=-\nabla^2\boldsymbol{H}$

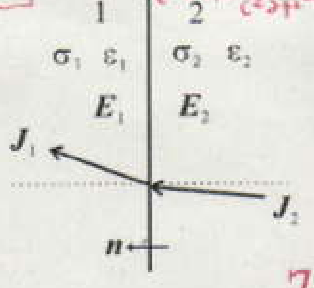
右辺 $=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times\boldsymbol{E}}_{①より}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}$

$\therefore \nabla^2\boldsymbol{H}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0$

$C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ を用いて $\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$

7

(3-3) 誘電率がε_1，導電率がσ_1なる媒質1と誘電率がε_2，導電率がσ_2なる媒質2の境界面を横切って$\boldsymbol{J}$なる電流密度の定常電流が流れているとき，この境界面に現れる自由電荷の密度（ 面電荷密度 ξ)を求めよ．



電流電荷の保存則 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ($\because$定常)

$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{J}\,dV=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0$

$\therefore \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{J}_2)=0$

$\therefore \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{J}_2=J_n$

オームの法則 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ より

$\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2$

境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\boldsymbol{n}\cdot(\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2)=\xi$

$\therefore \xi=\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\underbrace{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_1}_{J_{1n}}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\underbrace{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_2}_{J_{2n}}$ —①

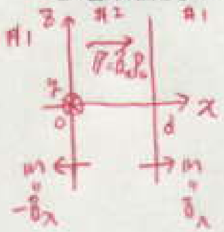
①へ代入して

$\xi=\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J_n$

ただし n は #2→#1 と向く 法線単位ベクトル J_nは$\boldsymbol{J}$の n 方向成分．

7

(3-4) y-z 方向無限に広い誘電体平板(厚さ d)がこの平板に垂直な方向に一様に分極されている，すなわち，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_x P_0$ のとき，内部の分極電荷密度ρ_pと分極電流電流 $\boldsymbol{J}_p$， 表面の面分極電荷密度ξ_p，内部および外部の電界 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ を求めよ．



i) $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$

ii) $x=0$ で $\boldsymbol{P}_1=0,\ \boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_x P_0$ より

$\xi_p(0)=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)$

$=\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_x P_0\cdot(-\boldsymbol{i}_x)$

$=-P_0$

$x=d$ で $\boldsymbol{P}_1=0,\ \boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_x P_0$

$\xi_p(d)=\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_x P_0\cdot(\boldsymbol{i}_x)=P_0$

iii) $\boldsymbol{J}_p=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}=0$

iv) 微分形 $\nabla\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\rho$ より $x=0$のみにおいて

$\nabla\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\frac{\partial(\varepsilon_0E_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varepsilon_0E_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varepsilon_0E_z)}{\partial z}=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -P_0 & (x=0)\\ 0 & (x>0)\end{cases}$

系の対称性とy-z無限平板より $\boldsymbol{E}$はE_x成分のみで $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$ より

$\frac{\partial\varepsilon_0E_x}{\partial x}=\begin{cases}0 & x<0\\ -P_0 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$

$\therefore \varepsilon_0E_x=\begin{cases}C_1 & x<0\ (\#1)\\ C_2 & x>0\ (\#2)\end{cases}$

境界条件 $\underbrace{\boldsymbol{n}}_{-\boldsymbol{i}_x}\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2)=\xi_p(0)$ より

$\boldsymbol{E}$の法線成分E_xは$x=0$で$\xi_p(0)=-P_0$の分不連続

$\therefore -(C_1-C_2)=\xi_p(0)=-P_0$

系の対称性より $C_1=-C_2$

$\therefore C_1=\frac{P_0}{2}\quad\therefore C_2=-\frac{P_0}{2}$

$\therefore E_x=\begin{cases}\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<0\\ -\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>0\end{cases}$

同様に$x=d$のみにおいて

$\frac{\partial(\varepsilon_0E_x)}{\partial x}=\begin{cases}0 & x<d\\ P_0 & x=d\\ 0 & x>d\end{cases}$

$\varepsilon_0E_x=\begin{cases}C_3 & x<d\ \#2\\ C_4 & x>d\ \#1\end{cases}$

境界条件 $\underbrace{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}_x}\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2)=\xi_p(d)$

E_xは$\xi_p(d)=P_0$の分不連続

$\therefore C_4-C_3=\xi_p(d)=P_0$

又系の対称性より $C_3=-C_4$

$\therefore C_3=-\frac{P_0}{2},\ C_4=\frac{P_0}{2}$

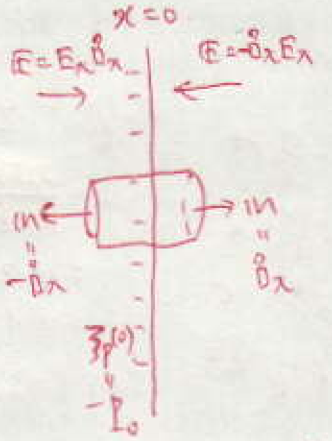
$\therefore E_x=\begin{cases}-\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<d\\ \frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>d\end{cases}$ これらより

$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0 & x<0\\ \boldsymbol{i}_x\left(-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) & 0<x<d\\ 0 & x>d\end{cases}$

v) $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_x\left(-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0+\boldsymbol{i}_xP_0=0$ (内外で)

9

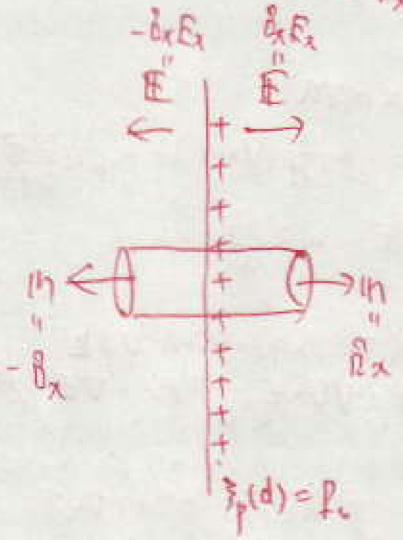
(3-4) 別解：積分形より $\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_v \rho\,dv$



$$\varepsilon_0 \underbrace{\mathbf{E}}_{=\mathbf{i}_x E_x}\cdot(-\mathbf{i}_x)\,dS + \varepsilon_0 \underbrace{\mathbf{E}}_{=-\mathbf{i}_x E_x}\cdot\mathbf{i}_x\,dS = \underbrace{\xi_p(0)}_{\text{面分極電荷密度}}\,dS = -P_0\,dS$$

$$\therefore\ -2\varepsilon_0 E_x\,dS = -P_0\,dS$$

$$\therefore\ E_x = \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \quad \therefore\ \mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ -\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$$



同様にして $x=d$ では

$$\varepsilon_0 \underbrace{\mathbf{E}}_{=-\mathbf{i}_x E_x}\cdot(-\mathbf{i}_x)\,dS + \varepsilon_0 \underbrace{\mathbf{E}}_{=\mathbf{i}_x E_x}\cdot\mathbf{i}_x\,dS = \xi_p(d)\,dS = P_0\,dS$$

$$\therefore\ 2\varepsilon_0 E_x\,dS = P_0\,dS$$

$$\therefore\ E_x = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ \mathbf{E} = \begin{cases} -\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<d \\ \mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>d \end{cases}$$

$x=0$ と $x=d$ の両面電荷の寄与を同時に考えると

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} + (-\mathbf{i}_x)\dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} = 0 & x<0 \\ -\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} + (-\mathbf{i}_x)\dfrac{P_0}{2\varepsilon_0} = -\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{\varepsilon_0} & 0<x<d \\ \underbrace{-\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0}}_{x=0\text{の寄与}} + \underbrace{\mathbf{i}_x \dfrac{P_0}{2\varepsilon_0}}_{x=d\text{の〃}} = 0 & x>d \end{cases}$$