電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑨	2009 年 7 月 17 日	学籍番号		氏名		評点	

（誘電体，磁性体，境界条件）

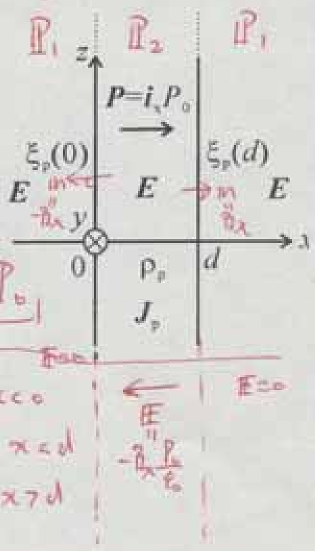
（1）分極電荷密度ρ_pと分極ベクトル$\boldsymbol{P}$の間に成立する関係式，及び分極ベクトル$\boldsymbol{P}$に関する境界条件を記述せよ．

$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbb{P}$, $\xi_p = -\mathbb{n}\cdot(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)$

（2）磁化電流密度$\boldsymbol{J}_m$と磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$の間に成立する関係式，及び磁化ベクトル$\boldsymbol{M}$に関する境界条件を記述せよ．

$\mathbb{J}_m = \nabla\times\mathbb{M}$, $\mathbb{K}_m = \mathbb{n}\times(\mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2)$

（3）y-z方向無限に広い誘電体平板(厚さd)がこの平板に垂直な方向に一様に分極されている，すなわち，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_xP_0$のとき，内部の分極電荷密度$\rho_p$と分極電流電流$\boldsymbol{J}_p$，表面の面分極電荷密度$\xi_p$，内部および外部の電界$\boldsymbol{E}$を求めよ．



・$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbb{P} = -\left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\hat{a}_xP_0 = 0$

・境界条件 $\xi_p = -\mathbb{n}\cdot(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)$ より $\xi_p(0) = \mathbb{P}_2\cdot\mathbb{n} = \hat{a}_xP_0\cdot(-\hat{a}_x) = -P_0$

右図のように$\mathbb{P}_{1,2}$, $\mathbb{n}$をとると

$\xi_p(d) = \mathbb{P}_2\cdot\mathbb{n} = \hat{a}_xP_0\cdot\hat{a}_x = P_0$

・$\mathbb{J}_p = \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\hat{a}_xP_0) = 0$

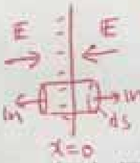
(※) したがって2つ合せて

$$\mathbb{E} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ -\hat{a}_x\frac{P_0}{\varepsilon_0} & 0<x<d \\ 0 & x>d \end{cases}$$

・$\mathbb{E}$について $x=0, d$ にそれぞれ電束に関する
ガウスの法則の積分形 $\oint_S \varepsilon\mathbb{E}\cdot\mathbb{n}\,dS = \int_V \rho\,dV$ を適用する

$x=0$

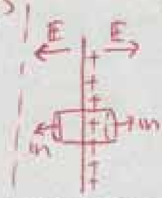
$\varepsilon_0\underset{\hat{a}_xE_x}{\mathbb{E}}\cdot(-\hat{a}_x)dS + \varepsilon_0\underset{-\hat{a}_xE_x}{\mathbb{E}}\cdot\hat{a}_xdS = \xi_p(0)\,dS = -P_0dS$



$\therefore -2\varepsilon_0E_xdS = -P_0dS$

$\therefore E_x = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}$ $\therefore \mathbb{E} = \begin{cases} \hat{a}_x\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ -\hat{a}_x\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$

$x=d$

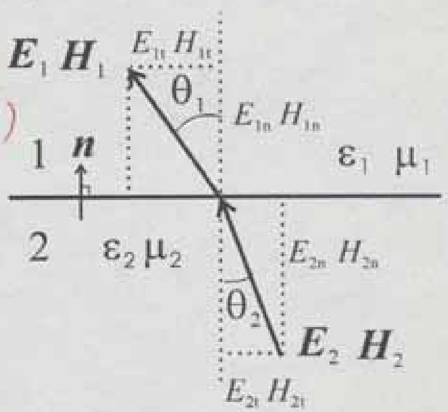


$\varepsilon_0\underset{-\hat{a}_xE_x}{\mathbb{E}}\cdot(-\hat{a}_x)dS + \varepsilon_0\underset{\hat{a}_xE_x}{\mathbb{E}}\cdot\hat{a}_xdS = \xi_p(d)\,dS = P_0dS$

$\therefore 2\varepsilon_0E_xdS = P_0dS$

$\therefore E_x = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}$ $\therefore \mathbb{E} = \begin{cases} -\hat{a}_x\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<d \\ \hat{a}_x\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>d \end{cases}$ (※)

（4）図のように，誘電体ε及び磁性体μの値が不連続的に変化する,二つの異なる線形,等方，均質な非導電性媒質の境界面上で，成立する$\tan\theta_1/\tan\theta_2$の関係式を求めよ．この関係は屈折の法則(law of refraction)と呼ばれる．なお非導電性媒質では一般的に面電荷密度$\xi=0$が成立する．



境界条件 $\mathbb{n}\times(\mathbb{E}_1-\mathbb{E}_2)=0$ より $E_{1t}=E_{2t}$ —①

$\mathbb{n}\times(\mathbb{H}_1-\mathbb{H}_2)=\mathbb{K}=0$ (∵非導電性)より $H_{1t}=H_{2t}$ —②

($B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$ —②')

又 $\mathbb{n}\cdot(\varepsilon_1\mathbb{E}_1-\varepsilon_2\mathbb{E}_2)=\xi=0$ より $\varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$ —③

$\mathbb{n}\cdot(\mu_1\mathbb{H}_1-\mu_2\mathbb{H}_2)=0$ より $\mu_1H_{1n}=\mu_2H_{2n}$ —④

$\therefore \tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}$ $\therefore \tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$

$$\therefore \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}\cdot\frac{E_{2n}}{E_{2t}} \underset{①}{=} \frac{E_{2n}}{E_{1n}} \underset{③}{=} \frac{E_{2n}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

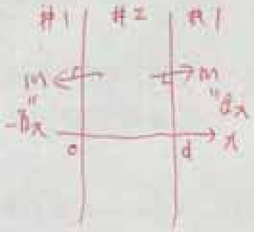
同様に $\tan\theta_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$, $\tan\theta_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$

$$\therefore \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}\cdot\frac{H_{2n}}{H_{2t}} \underset{②}{=} \frac{H_{2n}}{H_{1n}} \underset{④}{=} \frac{H_{2n}}{(\mu_2/\mu_1)H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

(3)の別解：微分形を使用

$$\nabla\cdot\varepsilon_0\mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla\cdot\varepsilon_0\mathbf{E} = \frac{\partial(\varepsilon_0E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_0E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon_0E_z)}{\partial z} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (\rho_p(0) = -P_0 & x=0) \\ 0 & 0<x<d \\ (\rho_p(d) = P_0 & x=d) \\ 0 & x>d \end{cases}$$



○ $x=0$ のみの場合

系の対称性と y-z 無限平板より $\mathbf{E}$ は E_x 成分のみで $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\therefore \frac{\partial \varepsilon_0 E_x}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (-P_0 & x=0) \\ 0 & x>0 \end{cases}$$

$$\therefore \varepsilon_0 E_x = \begin{cases} C_1 & x<0 \ (\#1) \\ C_2 & x>0 \ (\#2) \end{cases}$$

境界条件 $\overset{-\hat{e}_x}{\mathbf{n}}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}_1 - \varepsilon_0\mathbf{E}_2) = \rho_p(0) = -P_0$ より $\mathbf{E}$ の法線成分^{E_x}は $x=0$ で

$\rho_p(0) = -P_0$ の分 不連続となる

$$\therefore -(C_1 - C_2) = -P_0 \qquad \therefore C_1 = \frac{P_0}{2}, \quad \therefore C_2 = -\frac{P_0}{2}$$

又 系の対称性より $C_1 = -C_2$

$$\therefore E_x = \begin{cases} \frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ -\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>0 \end{cases}$$

同様に

○ $x=d$ のみの場合を考えると

$$\frac{\partial \varepsilon_0 E_x}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x<d \\ (P_0 & x=d) \\ 0 & x>d \end{cases}$$

$$\therefore \varepsilon_0 E_x = \begin{cases} C_3 & x<d \ (\#2) \\ C_4 & x>d \ (\#1) \end{cases}$$

境界条件 $\overset{\hat{e}_x}{\mathbf{n}}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}_1 - \varepsilon_0\mathbf{E}_2) = \rho_p(d) = P_0$ より $\mathbf{E}$ の法線成分 E_x は $x=d$ で

$\rho_p(d) = -P_0$ の分 不連続となる

$$\therefore C_3 = -\frac{P_0}{2} \quad \therefore C_4 = \frac{P_0}{2}$$

$$\therefore C_4 - C_3 = \rho_p(d) = P_0$$

又 系の対称性より $C_3 = -C_4$

$$\therefore E_x = \begin{cases} -\frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x<d \\ \frac{P_0}{2\varepsilon_0} & x>d \end{cases}$$

$x=0,\ d$ 両方合せて

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \hat{e}_x\left(-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) & 0<x<d \\ 0 & x>d \end{cases}$$

$0<x<d$ で

$$\therefore \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\hat{e}_x\left(-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) + \hat{e}_x P_0 = 0$$

$x<0,\ x>d$ で

$\mathbf{E}=0,\ \mathbf{P}=0$ より $\mathbf{D}=0$