電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B⑧	2009 年 7 月 10 日	学籍番号		氏名		評点	

（オームの法則，電流電荷の保存則，マクスウェル方程式）

（1）オームの法則 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ が成立するとき，電流電荷の保存則とマクスウェル方程式から電荷密度ρの時間発展を表す式と緩和時間τを求めなさい．但し，$t=0$ で$\rho=\rho_0$ とし，系は真空中にあり，真空中の誘電率はε_0とする．

電流電荷の保存則より

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\quad \text{—①}$$

オームの法則 $J=\sigma E$ を代入して

$$\sigma\nabla\cdot E=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\quad \text{—②}$$

電界に関するガウスの法則 $\nabla\cdot\varepsilon_0 E=\rho$ より

$$\nabla\cdot E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad \text{—③}$$

③を②へ代入すると

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial\rho}{\rho}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\partial t$$

$$\therefore\ \ln\rho=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t+C$$

$$\therefore\ \rho=e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t+C}$$

$t=0$で$\rho=\rho_0$より

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

（緩和時間）

（マクスウェル方程式の性質（境界条件と電磁波））

（1）電磁界基本法則の積分形(マクスウェル方程式に対する積分形)から導出される境界条件を記述して，その意味を述べよ．

$n\times(E_1-E_2)=0$ …… 電界Eの接線成分は連続。

$n\times(H_1-H_2)=K$ …… 磁界Hの接線成分は表面電流Kが存在すればその分不連続。

$n\cdot(D_1-D_2)=\xi$ …… 電束密度(or εE)の法線成分は表面電荷ξが存在すればその分不連続。

$n\cdot(B_1-B_2)=0$ …… 磁束密度Bの法線成分は連続。

（2）真空中のマクスウェル方程式より，電荷密度ρ，電流密度$\boldsymbol{J}$が存在しない空間における電界$\boldsymbol{E}$と磁界$\boldsymbol{H}$に対するベクトル波動方程式を導出せよ．但し，真空中の光速$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$とし，ベクトル公式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$を用いてよい．

$\rho=0$, $J=0$ の真空中における
マクスウェル方程式は

$$\begin{cases} ①\ \nabla\times E=-\mu_0\dfrac{\partial H}{\partial t}\\ ②\ \nabla\times H=\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\\ ③\ \nabla\cdot\varepsilon_0 E=0\\ ④\ \nabla\cdot\mu_0 H=0\end{cases}$$

①の両辺の∇×をとりベクトル公式と③と②を用いて

$$\text{左辺}=\nabla\times\nabla\times E=\nabla\underbrace{\nabla\cdot E}_{=0\ \because③}-\nabla^2 E=-\nabla^2 E$$

$$\text{右辺}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times H}_{②より}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \nabla^2 E-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

同様に②の両辺の∇×をとり，ベクトル公式と①④を用いて

$$\text{左辺}=\nabla\times\nabla\times H=\nabla\underbrace{\nabla\cdot H}_{=0\ \because④}-\nabla^2 H=-\nabla^2 H$$

$$\text{右辺}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times E}_{①より}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \nabla^2 H-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=0$$

$c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ を用いて

ベクトル波動方程式

$$\begin{cases}\nabla^2 E-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2 H-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}=0\end{cases}$$