

(マクスウェル方程式の直接的適用 (静電磁界))

真空中に置かれた半径 a なる無限に長い円柱内を軸方向に定常電流 $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_0 r$ が流れているとき生ずる磁界 $\mathbf{H}$ を求める。但し、電流密度 $\mathbf{J}$ は J_0 を定数とし、 r に比例する。以下の問いに答えよ。

(1) アンペア・マクスウェルの法則を表すマクスウェル方程式を記述せよ。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{or } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t})$$

(2) 円柱内外の磁界 $\mathbf{H}$ を求める為に解くべき微分方程式を上記の法則より導出せよ。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\phi & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\hat{r} \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial z} \right\} + r\hat{\phi} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} \right] \\ &= \hat{r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right\} + \hat{\phi} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} \\ &= \begin{cases} \hat{z} J_0 r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \end{aligned}$$

系の z 軸対称性より $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ および z 方向に無限長一様より $\frac{\partial}{\partial z} = 0$
 したがって $\mathbf{H}$ は ϕ 成分 H_ϕ のみより 解くべき微分方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} = \begin{cases} J_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

(3) 円柱内外の磁界 $\mathbf{H}$ を求める為に使用する境界条件を表す一般的式を記述し、本問題における境界条件を求めよ。但し、表面電流密度 $\mathbf{K} = 0$ である。

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$$

本問題では境界に表面電流が存在しない $\mathbf{K} = 0$ より $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$
 $\therefore$ 境界 $r = a$ で $\mathbf{H}$ の接線成分 H_ϕ は連続。

(4) (2) と (3) より磁界 $\mathbf{H}$ を求め、また $\mathbf{H}$ の大きさの分布を図示せよ。

i) $r < a$ の場合 ii) $r > a$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} &= J_0 & \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} &= J_0 r & \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} &= 0 \\ \therefore rH_\phi &= \frac{1}{2} J_0 r^2 + C_1 & \therefore rH_\phi &= C_2 \\ \therefore H_\phi &= \frac{1}{2} J_0 r + \frac{C_1}{r} & \therefore H_\phi &= \frac{C_2}{r} \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

$r = 0$ で $\mathbf{H}$ は有限より $C_1 = 0$
 $\therefore H_\phi = \frac{1}{2} J_0 r \quad (r < a)$ --- (1)

(3) の境界条件より
 H_ϕ は $r = a$ で連続なため
 (1) (2) より $H_\phi(r=a) = \frac{1}{2} J_0 a = \frac{C_2}{a}$
 $\therefore C_2 = \frac{1}{2} J_0 a^2$

$\therefore H_\phi = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0 r & (r < a) \\ \frac{1}{2} J_0 \frac{a^2}{r} & (r > a) \end{cases}$

