電磁理論 IA&IB ミニッツレポート B②	2009 年 6 月 5 日	学籍番号		氏名		評点	

（真空中の電磁界基本法則 I）

（1）半径 a の円筒状（厚さゼロ）の一様な定常電流(電流密度 $\boldsymbol{J}$ [A/m])が z 軸方向に流れている．以下に答えよ．（$\mathbb{J} = \hat{a}_z J$）

1.1 アンペアの周回積分の法則(積分形)を記述せよ．

$$\oint_C \frac{\mathbb{B}}{\mu_0} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J} \cdot \mathbb{n}\, dS \quad \left(\oint_C \mathbb{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbb{J} \cdot \mathbb{n}\, dS \text{ でも可} \right)$$

1.2 1.1 の法則を用いて円筒内外の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．また $\boldsymbol{B}$（の大きさの r 方向分布）を図示せよ

z 軸方向無限長の定常電流 $\mathbb{J} = \hat{a}_z J$ で円柱対称な系ゆえに

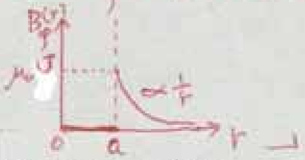
$\mathbb{B}$ は φ 方向成分 B_φ のみで r が同じなら $B_\varphi =$ 一定，$\mathbb{B} = \hat{a}_\varphi B_\varphi(r)$，$d\boldsymbol{l} = \hat{a}_\varphi r\, d\varphi$

1.1 の法則より半径 r の周回を考えて 左辺 $= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \hat{a}_\varphi B_\varphi(r) \cdot \hat{a}_\varphi r\, d\varphi = \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(r)\, r\, [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi r}{\mu_0} B_\varphi(r)$

$\mathbb{n} = \hat{a}_z$，$\mathbb{J} = \hat{a}_z J$，$dS = r\,dr\,d\varphi$，J は $r = a$ でのみ存在するので

$$\left(\begin{aligned} &r < a \text{ のとき } \frac{1}{\mu_0} 2\pi r B_\varphi(r) = 0 \quad \therefore B_\varphi = 0 \\ &r \geq a \text{ のとき } \frac{1}{\mu_0} 2\pi r B_\varphi(r) = \int_0^{2\pi} \hat{a}_z J \cdot \hat{a}_z a\, d\varphi = Ja [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi a J \quad \therefore B_\varphi(r) = \mu_0 \frac{aJ}{r} \end{aligned} \right)$$

$$\therefore \mathbb{B}(r) = \begin{cases} \mathbb{0} & r < a \\ \hat{a}_\varphi \mu_0 \dfrac{aJ}{r} & r \geq a \end{cases}$$



1.3 全電流 I とするとき，I を用いて $\boldsymbol{B}$ を表せ．

$$I = 2\pi a J \quad \therefore J = \frac{I}{2\pi a} \quad \therefore \mathbb{B}(r) = \begin{cases} \mathbb{0} & r < a \\ \hat{a}_\varphi \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r} & r \geq a \end{cases}$$

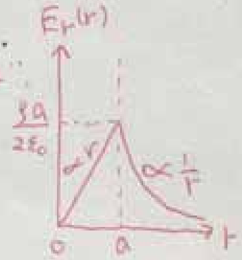
（r=0 に I が流れているときと等価）

（2）一様電荷密度 ρ で満たされた半径 a の円柱状の静止電荷分布がある．以下に答えよ．

2.1 電束に関するガウスの法則(積分形)を記述せよ．

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot \mathbb{n}\, dS = \int_V \rho\, dV$$

2.2 上記の法則を用いて円柱内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．また $\boldsymbol{E}$（の大きさの r 方向分布）を図示せよ．



z 軸方向無限長で円柱対称より電界 $\mathbb{E}$ は r 成分 E_r のみでかつ r が同じなら値は同じ．

$\therefore \mathbb{D} = \hat{a}_r \varepsilon_0 E_r(r)$，$\mathbb{n} = \hat{a}_r$，$dS = |d\boldsymbol{l}_\varphi \times d\boldsymbol{l}_z| = r\, d\varphi\, dz$

2.1 の法則より半径 r の円柱（z 方向長さ 1）を考えて

左辺 $= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \hat{a}_r \varepsilon_0 E_r(r) \cdot \hat{a}_r r\, d\varphi\, dz = \varepsilon_0 r E_r(r) [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 = 2\pi r \varepsilon_0 E_r(r)$

$dV = d\boldsymbol{l}_r \cdot (d\boldsymbol{l}_\varphi \times d\boldsymbol{l}_z) = r\, dr\, d\varphi\, dz$ より

$r < a$ のとき $2\pi \varepsilon_0 r E_r(r) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r\, dr\, d\varphi\, dz = \rho \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^r [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 = \pi r^2 \rho \quad \therefore E_r(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$

$r \geq a$ のとき $2\pi \varepsilon_0 r E_r(r) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho r\, dr\, d\varphi\, dz = \rho \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^1 = \pi a^2 \rho \quad \therefore E_r(r) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$

$$\therefore \mathbb{E}(r) = \begin{cases} \hat{a}_r \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} & r < a \\ \hat{a}_r \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} & r \geq a \end{cases}$$

2.3 z 軸方向単位長さ当りの全電荷を q とするとき，q を用いて $\boldsymbol{E}$ を表せ．

$$q = \pi a^2 \cdot 1 \cdot \rho \quad \therefore \rho = \frac{q}{\pi a^2} \quad \therefore \mathbb{E}(r) = \begin{cases} \hat{a}_r \dfrac{q r}{2\pi \varepsilon_0 a^2} & r < a \\ \hat{a}_r \dfrac{q}{2\pi \varepsilon_0 r} & r \geq a \end{cases}$$

（r=0 に q が存在するときと等価）

単位長さ当りの電荷

（3）電荷保存の法則(積分形)を記述せよ．

$$\oint_S \mathbb{J} \cdot \mathbb{n}\, dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dV$$