記号論理学(金子)06

菊[illegible]

Date . . No. 1

fは付値関数のつもりです

1. (a) $\langle A,B,C\rangle = \langle F,F,T\rangle$とすれば.

$f(\neg A \to B) = F$, $f((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B) = T$となり $f((\neg A \to B) \vee ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)) = T$

一方 $\langle A,B,C\rangle = \langle F,F,F\rangle$とすれば

$f(\neg A \to B) = F$, $f((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B) = F$となり $f((\neg A \to B) \vee ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)) = F$

したがって(a)は.トートロジーでも矛盾式でもない。

(b)

A	B	(A	→	B)	∧	(A	→	¬B)
T	T	T	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	T	F	T	T

左真偽表より.(b)はトートロジーでも矛盾式でもない。

(c) $f((A \to (B \vee C)) \vee (C \to \neg A)) = F$とすると.

$f(A \to (B \vee C)) = F$ -① かつ $f(C \to \neg A) = F$ -②

①より $f(A) = T$ かつ $f(B \vee C) = F$ -③

②より $f(C) = T$ かつ $f(\neg A) = F$

ところが $f(C) = T$より $f(B \vee C) = T$となり③と反し不合理

したがって. $f((A \to (B \vee C)) \vee (C \to \neg A)) = F$となる$\langle A,B,C\rangle$の行は存在せず.

(c)はトートロジー

(d) $\langle A,B,C,D\rangle = \langle T,T,T,T\rangle$とすれば

$f((A \to B) \wedge C) \vee (A \wedge D)) = T$

一方 $\langle A,B,C,D\rangle = \langle F,T,F,F\rangle$とすれば

$f((A \to B) \wedge C) \vee (A \wedge D)) = F$.

したがって. (d)はトートロジでも矛盾式でもない。

(e)

A	B	(A	→	B)	∨	(B	→	A)
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	F

左真偽表より.(e)はトートロジー.

2. (a)より $\mathfrak{A}(F)=T \to \mathfrak{A}(G)=T$.

一方(b)より真偽表が真となるのは

F	G	F	→	G
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

$\langle F, G\rangle = \langle T, T\rangle, \langle F, T\rangle, \langle F, F\rangle$

のとき、これより $\mathfrak{A}(F)=T \to \mathfrak{A}(G)=T$

となるので (a), (b)は同値

一方 $F \wedge \neg G$ の真偽表

F	G	F	∧¬	G
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	F	F

これを真とする行が等しいので

$\langle F, G\rangle = \langle T, T\rangle, \langle F, T\rangle, \langle F, F\rangle$

となり、これより $\mathfrak{A}(F)=T \to \mathfrak{A}(G)=T$

となり、(a), (b), (c)は同値. q.e.d.

3. (a)

1	(1)	$Q \to (P \to R)$	Ass.
2	(2)	$\neg R$	Ass.
3	(3)	Q	Ass.
1,3	(4)	$P \to R$.	1, 3, →-E
5	(5)	P	H
1,3,5	(6)	R	4, 5, →-E
1,2,3,5,	(7)	$\perp$	2, 6, ¬-E
1,2,3	(8)	$\neg P$	5, 7, ¬-I

$\therefore Q \to (P \to R), \neg R, Q \vdash \neg P$.

(b)

1	(1)	$\neg P \vee Q$	Ass.
2.	(2)	$\neg P$	H.
3	(3)	P	H
2,3	(4)	$P \wedge \neg P$	2, 3, ∧-I
5	(5)	$\neg Q$	H
2, 3	(6)	$\perp$	2, 3, ¬-E
2, 3,	(7)	$\neg\neg Q$	5, 6, ¬-I
2, 3	(8)	Q	7, DN-E
2.	(9)	$P \to Q$	3-8, →-I.
10	(10)	Q	H
11	(11)	P	H
10.	(13)	$P \to Q$.	10, 11, →-I.
1	(14)	$P \to Q$.	1, 2-9, 10-13, ∨-E.

記号論理学

(c) ← これが一番ムズかった。

1	(1)	$\neg(P \to Q)$	Ass.
2	(2)	Q	H
3	(3)	$\neg P$	H
4	(4)	Q	H
5	(5)	P	H
4	(6)	$P \to Q$	4, 5, →-I
1, 4	(7)	$\bot$	1, 6, ¬-E
1	(8)	$\neg Q$	4, 7, ¬-I
1, 2	(9)	$\bot$	2, 8, ¬-E
1, 2	(10)	$\neg\neg P$	3, 9, ¬-I
1, 2	(11)	P	10, DN-E
1	(12)	$Q \to P$	2-11, →-I

(d)

1	(1)	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	Ass.
2	(2)	$\exists x \neg Q(x)$	Ass.
3	(3)	$\forall x (R(x) \to \neg P(x))$	Ass.
4	(4)	$\neg Q(x)$	H
1	(5)	$P(x) \vee Q(x)$	1, ∀-E
3	(6)	$R(x) \to \neg P(x)$	3, ∀-E
7	(7)	$P(x)$	H
8	(8)	$R(x)$	H
3, 8	(9)	$\neg P(x)$	6, 8, →-E
3, 7, 8	(10)	$\bot$	7, 9, ¬-E
3, 7	(11)	$\neg R(x)$	8-10, ¬-I
12	(12)	$Q(x)$	H
13	(13)	$R(x)$	H
4, 12	(14)	$\bot$	4, 12, ¬-E
4, 12	(15)	$\neg R(x)$	13, 14, ¬-I
1, 3, 4	(16)	$\neg R(x)$	5, 7-11, 12-15, ∨-E
1, 3, 4	(17)	$\exists x \neg R(x)$	16, ∃-I
1, 2, 3	(18)	$\exists x \neg R(x)$	2, 4-18, ∃-E

(e)

1	(1)	$\exists x \exists y (S(x,y) \vee S(x,y))$	Ass.
2	(2)	$\exists y (S(z,y) \vee S(y,z))$	H
3	(3)	$S(z,z) \vee S(z,z)$	H
4	(4)	$S(z,z)$	H
5	(5)	$S(z,z)$	H
3	(6)	$S(z,z)$	3, 4, 5, ∨-E
3	(7)	$\exists y\, S(z,y)$	6, ∃-I
2	(8)	$\exists y\, S(z,y)$	2, 3-7, ∃-E
2	(9)	$\exists x \exists y\, S(x,y)$	8, ∃-I
1	(10)	$\exists x \exists y\, S(x,y)$	1, 2-9, ∃-E

4. φが充足するためには、$P(x,y)$, $P(z,y)$, $P(x,z) \to P(z,x)$がともに真である必要がある。

(a)について。

$x<y$, $z<y$より、$x<y$となるようにyをとり、$z<x$となるようにzをとれば
$z<y$で、$Not(x<z)$なので$P(x,y)$, $P(z,y)$は真で$P(x,z)$は偽で
$P(x,z) \to P(z,x)$は真となりφは充足可能

(b)について。

$y=2x$、$y=2z$となるようにy, zをとれば、$x=z$で、$z \neq 2x$なので、
$P(x,y)$, $P(z,y)$は真で、$P(x,z)$は偽で$P(x,z) \to P(z,x)$は真となり
φは充足可能

(c)について。

$x<y+1$, $z<y+1$より$x-z<0$
一方$P(x,z) \to P(z,x)$が真であるためには、$P(x,z) \wedge P(z,x)$が真か$P(x,z)$が偽

i) $P(x,z) \wedge P(z,x)$が真とすると
$x<z+1$、$z<x+1$となり$x-z<z-x$ $\therefore x<z$
$\therefore x<z<x+1$ ところがこのような自然数zは存在しないので不適

ii) $P(x,z)$が偽とすると
$x \geq z+1$、$\therefore x-z \geq 1$ 一方$x<y+1$, $z<y+1$より$x-z<0$
よって、$x-z<0$かつ$x-z \geq 1$、この様な整数$x-z$は存在しないので不適
よって、φは充足不可能

5, ある命題 φ の高さを $M(\varphi)$ と定義する。

$M(H)$ に関する帰納法で示す。

i) $M(H)=1$ のとき、

$H=F$ であり $H'=G$.

$F \leftrightarrow G$ より $H \leftrightarrow H'$

ii) $M(H)=n$ のとき $(n\in\mathbb{N},\ n>1)$

$H \leftrightarrow H'$ と仮定する。

このとき $I=H\land F$, $J=H\land G$, $I'=H'\land F$, $J'=H'\land G$.

$H \leftrightarrow H'$, $F \leftrightarrow G$ より真理値表は右

これより $I \leftrightarrow I'$, $I \leftrightarrow J'$, $J \leftrightarrow I'$, $J \leftrightarrow J'$

$M(I)=M(J)=n+1$

なので

$M(H)=n+1$ のときも成立。

他の結合子を用いた場合も同様 q.e.d

H	H'	F	G	$H\land F$	$H\land G$	$H'\land F$	$H'\land G$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

6, Γ 中の任意の文を φ とおく。右の真理値表より

$\neg(\varphi \lor (\neg A))$ と $\neg\varphi\land A$ は同値

よって $\Gamma \vdash A$ と $\neg\Gamma \cap A$ が同値であることを示す。

$\Gamma \vdash A$ が真とすると $\mathfrak{A}(\varphi)=T \rightarrow \mathfrak{A}(A)=T$

又は $\mathfrak{A}(\varphi)=F$.

いずれにしても $\mathfrak{A}(\neg\varphi\land A)=T$.

よって $(\Gamma\vdash A) \rightarrow (\neg\Gamma\cap A)$

一方 $\neg\Gamma\cap A$ が真とすると $\mathfrak{A}(\varphi)=F$ かつ $\mathfrak{A}(A)=T$.

$\mathfrak{A}(A)=T$ なので $\Gamma\vdash A$ も真

したがって $(\Gamma\vdash A) \leftrightarrow (\neg\Gamma\cap A) \leftrightarrow (\neg(\Gamma\cup(\neg A)))$ q.e.d

φ	A	$\neg(\varphi\lor(\neg A))$			$\neg\varphi\land A$	
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F