# Chapter 3. Single-parameter models

2007/12/6 (Tur.) 飯島勇人[*1][*2] [*3]

## 3.1 この章の目的

1. Bayes 統計を用いた 1 パラメータの推定方法の例示
2. 事前分布の違いによる Bayes 推定結果の違い

＊訳注：基本的にこの章では事前分布、事後分布ともに R の関数を使って算出しており、むしろ周辺分布の推定をしています。事後分布を推定するのは大変だから？

## 3.2 平均値が既知で分散が不明の正規分布における分散の推定

たいした事書いてないんで無視。

## 3.3 心臓移植における死亡率の推定

**この節で行うこと**

とりあえずポアソン分布のデータ使って Bayes 推定してみましょうか。

心臓移植における死亡率の予測を考える。術後 30 日以内の死亡を死亡とする。このような一定時間内のカウントデータの分布は通常ポアソン分布でよく表現できるとされている。

ポアソン分布

単位時間中に平均で λ 回発生する事象が k 回発生する確率

$$Po(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

が、本データのように 0（死亡）が多く、平均値が 0 に近い場合は λ の推定がうまくいかない。λ はここで言うと、死亡率である。今回は死亡率 λ の尤度関数として指数分布（形状母数を 1 としたときのガンマ分布）

$$p(\lambda) = \lambda^{\alpha} \exp(-\beta\lambda), \text{ただし} \lambda \geq 0,$$

を使う。また事前分布に関しては無情報事前分布（つまり期待値）$p(\lambda) = \lambda^{-1}$ を使う。んで、今回の期待値は 10 の病院での手術数（15174）と死亡者数（10）である。するとベイズの定理

[*1] 北海道大学大学院農学研究院専門研究員
[*2] 連絡先: hayato.iijima@gmail.com または http://www.geocities.jp/iijima_web/index.html
[*3] 本ゼミのサポートページ: http://www7.atwiki.jp/hayatoiijima/pages/37.html

$Pr(\theta|y) \propto Pr(y|\theta)Pr(\theta)$ より $\lambda$（すなわち死亡率）の事後確率は、

$$p(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)$$

となる。もう一度整理すると、ある病院において e 回の心臓移植手術が行われ、そのうち死亡した数を $y_{obs}$ とし、死亡数の期待値が Poisson(e$\lambda$) であり、$\lambda$ が gamma($\alpha$, $\beta$) 関数として事前に与えられるなら、その事後分布は gamma($\alpha + y_{obs}$, $\beta + e$) のガンマ分布となる。これらを Bayes の定理に当てはめると、周辺尤度（$Pr(y)$; データが得られる確率）を $Pr(y) = \dfrac{Pr(y|\theta)Pr(\theta)}{Pr(\theta|y)}$ から計算することが出来る。以下で具体的な計算を行う。

**異なるデータセットによる比較**

- 病院 A では手術数 66、死亡数 1 という比較的少ないデータしかない。
- 病院 B では手術数 1767、死亡数 4 という多くのデータがある。

この場合の周辺尤度の計算は、配ったコードファイルのように。
事前分布と事後分布の関係はコードファイルにしたがって作図してみよう。

## 3.4 Bayes 統計の頑健性の例示

**この節で行うこと**
事前分布を変えた場合の推定結果の違いについて示す。

Bayes 推定において問題となるのは、事前分布の妥当性である。事前分布の違いによる事後分布の違いを、Joe 君の IQ テストの例を用いて示す。知りたいのは、Joe 君の真の IQ、$\theta$ である。

**事前分布が正規分布である**

- テストの点数 $\theta$ の分布は平均 $\mu$、標準偏差 $\tau$ の正規分布に従う（つまり $\theta \sim N(\mu, \tau)$）。
- 事前分布として、Joe 君の IQ テストの得点は平均 100 であり、80 から 120 点の間に 90% のデータが存在するはずであるという考えがある。これに対応する $\mu$ と $\tau$ はそれぞれ 100 と 12.6 である。

Joe 君に 4 つのテストを受けてもらった。その点数はそれぞれ $y_1$、$y_2$、$y_3$、$y_4$ である。個々の点数 $y$ の分布は N($\theta$, $\sigma$=15) に従い、4 つのテストの平均値 $\bar{y}$ は $N(\theta, \sigma/\sqrt{4})$ に従うと仮定する。

$\theta$ の事前分布が正規分布なので、$\theta$ の事後分布も正規分布となり、それは標準偏差 $\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{4/\sigma^2+1/\tau^2}}$、平均 $\mu_1 = \frac{\bar{y}(4/\sigma^2)+\mu(1/\tau^2)}{4/\sigma^2+1/\tau^2}$ である。

**事前分布が $t$ 分布である**

- テストの点数の分布は中央値 $\mu$、スケールパラメータ $\tau$、自由度 $v$ の $t$ 分布 $t(v,\ \mu,\ \tau)$ に従う。

- 事前分布としての仮定は正規分布の場合と一緒（$t$ 分布ではスケールパラメータで分布の広がりを調整する）。

この場合の $\theta$ の事後分布は以下の形で表される。

$$g(\theta|\text{data}) \propto \phi(\bar{y}|\theta, \sigma/\sqrt{n})g_T(\theta|v, \mu, \tau)$$

しかし今回、通常の事前分布 × 尤度関数による事後分布の算出を行うには、関数の形が難しい。そこで、ヤクザ的手法により事後分布を算出する。ヤクザ的手法とは、あらかじめ十分な範囲の $\theta$ を与えておいて、各 $\theta$ について事後確率密度を算出し（点推定？）、全ての $\theta$ に対する事後確率の和で事後分布を割ることで確率密度化するという手法である（訳注：こういうことが一般的なのかはわからない）。ヤクザ的手法による事後確率およびそれによる推定された平均値と標準偏差を算出する方法はコードファイルのとおり。

結果を見ると、得られたテストの点が事前の $\theta$ に近い場合は事前分布の違いはそれほど推定結果の違いをもたらさないが、そうではない場合は推定結果が異なっている。

## 3.5 Bayes 統計によるコインの正しさのテスト

**この節で行うこと**

コインが正しい（歪んでおらず、裏と表が等確率で出る）かどうかを、二項分布やベータ分布を用いた Bayes 推定により検証する。

### 検定による検証

何回かコインを投げて $y$ というデータを得るが、これはパラメータ $n$ と $p$ の二項分布に従う。帰無仮説 $H$ は $p = 0.05$ である。$y$ が観測された場合、$p$ 値は $2 \times P(Y \leq y)$ で定義される。例えば 20 回投げて表が 5 回しか観測されないデータ $y$ を得たときに、そのような現象が起こる確率は

```
> pbinom(5, 20, 0.5)
```

で表される。両側検定なので得られる確率を 2 倍すると 0.042 となり、帰無仮説は棄却される。

### Bayes 推定による検証

これを Bayes 統計の観点から考える。事前分布 $p$ は、コインが正しいあるいは正しくないということが等確率であるというものである。この事前分布は、ベータ分布として考えることができる ($p \sim \text{beta}(a, a)$)。

$$g(p) = 0.5I(p = 0.5) + 0.5I(p \neq 0.5)g_1(p)$$

ここで I() は () が真の場合 1、偽の場合 0 を取る関数である（ダミー変数）。ここで先ほどの観測データ $y$ を得たときに、コインの表が出る確率 $p$ の事後分布は

$$g(p|y) = \lambda(y)I(p = 0.5) + (1 - \lambda(y))g_1(p|y)$$

となる。ここで $g_1$ は $\text{beta}(a+y, a+n-y)$ というベータ分布であり、$\lambda(y)$ はコインが正しいとした場合の事後分布である。$\lambda(y)$ は、

$$\lambda(y) = \frac{0.5p(y|0.5)}{0.5p(y|0.5) + 0.5m_1(y)} \tag{1}$$

で定義される。ここで $p(y|0.5)$ は $p = 0.5$ のときの二項分布の確率密度であり、$m_1(y)$ はベータ分布の確率密度（すなわち $p \neq 0.5$）である。R では、事後分布は容易に計算することが出来る。`dbinom()` は $p(y|0.5)$ のときの二項分布に従う確率密度を計算し、そうでない場合の確率密度は Bayes の定理を用いて以下のように計算できる。

$$m_1(y) = \frac{f(y|p)g_1(p)}{g_1(p|y)}$$

**関数紹介 pbetat()**

この関数は、上記のような問題の Bayes 推定に適用可能である。

```
> library(LearnBayes)
> pbetat(p, 0.5, c(a, a), c(y, n - y))
```

結果は $p = 0.2802215$ となり、帰無仮説は棄却できない。すなわちコインは正しい（歪んでいない）という結論を得る。通常の検定との違いは、事前分布による重みによって生み出されている（と勝手に解釈）。

### 事前分布を変えた場合の推定結果の違い

今回は $p \neq 0.5$ の場合の $p$ の事前分布として $p \sim \text{beta}(a, a)$ を仮定し、$a = 10$ とした。この $a$ を変化させた場合、推定結果は異なるだろうか？この結果はコードファイルによる作図の結果明らかになる。

### 頻度主義と Bayes 主義の違い

今回のような問題を扱うときに、帰無仮説 $p = 0.5$ に対して $p$ 値は、

- 頻度主義（検定）では 20 回中表が 5 回**以下**になる確率
- Bayes 主義では、20 回中表が 5 回になる確率

として定義される。これも頻度主義と Bayes 主義の違いである。では、Bayes 推定において 20 回中表が 5 回以下になる確率としたときに推定結果はどうなるのだろうか？この場合の事後分布は (1) 式より、

$$\lambda(y) = \frac{0.5P_0(Y \leq 0.5)}{0.5P_0(Y \leq 0.5) + 0.5P_1(Y \leq 0.5)} \tag{2}$$

と定義される。この計算の具体的なコードはコードファイルに示してあるが、単に表の回数が 5 の場合、4 の場合、... のそれぞれの事後確率を足し合わせればよい。

結果は $p = 0.2184649$ となり、表が出た回数が 5 回だけの場合の $p$ よりも多少小さくなっている。これは「5 回またはそれ未満表が出る」現象は「5 回表が出る」現象よりも $p = 0.5$ でないことを言うために確からしい現象だからである。