微分積分学 B　定期試験問題　　２０１１年１月２７日 担当 久保

注：$\mathbb{R}^n$ 上のノルム $|\cdot|_n$ は $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $|x|_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ で定めるものとする．

1． 以下の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 任意有限個の閉集合の合併は閉集合であることを示し，無限個の閉集合の合併が閉集合にならない例を作れ．

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の閉集合 A と点 $x \notin A$ とに対し，ある数 $d > 0$ が存在して，$\forall y \in A$ に対して $|y - x|_n \geq d$ とできることを証明せよ．

x　$d = |y-x|$

2． 以下の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 関数 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について，f が $a \in \mathbb{R}^n$ で全微分可能であることの定義をノルム $|\cdot|_n$ と $|\cdot|_m$ とを用いて正確に記述せよ．

(2) 関数 f は全微分可能とするとき，関数 $F(x, y, z) := f(x^y, y^z, z^x)$ の偏導関数をそれぞれ求めよ．

$f \circ f^{-1} = I$　$(f^{-1})' f' \circ f^{-1} = I$　$f(D_x) \subset f(A)$

3． $A \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，関数 $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を一対一かつ C^1 級で，$\forall x \in A$ で $\det f'(x) \neq 0$ を満たすものとする．このとき，$f(A) \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であることを示せ．

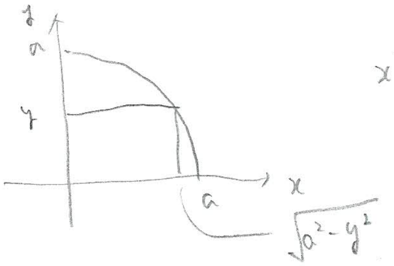
$\int e^{-r^2} dr$　$e^{-r^2} = \frac{1}{e^{r^2}} = \frac{1}{(e^r)^2}$

4． 以下の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が測度 0 であることの定義を正確に記述せよ．　$(e^{-r^2})' =$

(2) Jordan 可測な有界集合 C と $\varepsilon > 0$ とに対し，C に含まれる Jordan 可測なコンパクト集合 K で $\displaystyle\int_{C-K} 1 < \varepsilon$ となるものが存在することを証明せよ．

5． 関数 $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$，領域 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ に対して，積分 $\displaystyle\int_D f$ を計算せよ．



$x^2 = a^2 - y^2$