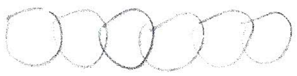
微分積分学 B　期間外試験問題　２０１１年１月２０日 担当 久保

1． 以下の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトであることの定義を開被覆という言葉を用いて正確に記述せよ．

(2) 任意無限個の開集合の合併が開集合であることを証明せよ．



2． 以下の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 関数 $f(x,y,z) = x^{y+z}$ の偏導関数を求めよ．

(2) 関数 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して次の極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}$ が存在するとき，この極限を f の a での x 方向微分といい，$D_x f(a)$ で表すとする．このとき，f が a で全微分可能ならば，$D_x f(a) = Df(a)(x)$ であることを証明せよ．

x^z x^y

3． 関数 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は点 $a \in \mathbb{R}^n$ を含むある開集合上で C^1 級であり，$f(a)$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 W から a を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V への写像 $f^{-1}: W \longrightarrow V$ （f の逆関数）が存在するとする．このとき，$\det f'(a) = 0$ ならば f^{-1} は $f(a)$ で全微分可能ではないことを証明せよ．

$(f(a))'(f^{-1})'(f(a)) = I$

4． 集合 $A \subset [0,1]$ は開区間 (a_i, b_i) の合併，つまり $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ であり，開区間 $(0,1)$ 内の任意の有理数が少なくともひとつの (a_i,b_i) に属するものとする．このとき，次の各問いにそれぞれ答えよ．

(1) A の境界が $[0,1]-A$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i) < 1$ ならば，A の境界は測度 0 でないことを示せ．

$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$

5． 関数 $f(x,y) := \dfrac{x-y}{1+x+y}$，領域 $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 1\}$ に対して，積分 $\displaystyle\int_D f$ を変数変換 $x = \frac{1}{2}(u+v)$，$y = \frac{1}{2}(u-v)$ を用いて計算せよ．

$\frac{1}{2}\cdot 2u = u$

$1 + \frac{1}{2}(u+v+u-v) = 1+u$